examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

Nu bij je boek
mijn.examenbundel.nl
Online oefenen, video's en meer

2021|2022

havo

Wiskunde B

ThiemeMeulenhoff

examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

2021 | 2022

H.R. Goede

havo

Wiskunde B

ThiemeMeulenhoff

mijn.examenbundel.nl

Slagen zonder examenstress doe je met Examenbundel, Samengevat, Examenidioom en Zeker Slagen! Alles voor je schoolexamens en je centrale examens in je boeken, maar ook online.

- Quickscan
- Antwoorden bij de oriëntatietoets
- Video's en andere leerbronnen
- Oefenexamens
- Overzicht van al je examenvakken
- En nog veel meer op Mijn Examenbundel!

Ga naar mijn.examenbundel.nl en log in op Mijn Examenbundel. Met deze code krijg je toegang tot heel veel (digitale) extra's die bij je bundel horen:

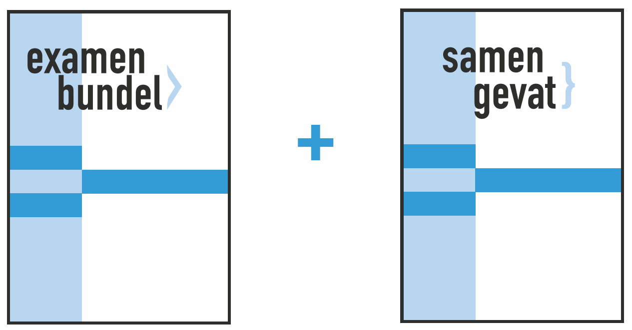
Deze code is uniek en door één persoon te gebruiken. Geldig tot 15 juli 2022.

#ikgazekerslagen

Voorwoord

Met deze **Examenbundel** bereid je je goed voor op het eindexamen en op de schoolexamens. Je oefent met echte examenopgaven. Als je niet weet hoe je een vraag aan moet pakken, raadpleeg dan de bijbehorende hint. In de uitwerkingen staan de antwoorden met een duidelijke uitleg. Zo weet je precies wat je goed en fout hebt gedaan.

Gebruik naast deze **Examenbundel** ook het boek **Samengevat** om te leren voor je examen. Hierin vind je een handige samenvatting van alle examenstof.



Oefenen met echte examens en duidelijke uitwerkingen

Overzichtelijke samenvatting van de examenstof

Wil je weten op welke datum het centraal examen is?
Ga naar examenbundel.nl/examenrooster voor het actuele examenrooster.
Of scan de QR-code:

Namens team **Examenbundel** heel veel succes!

Heb je een vraag of opmerking over deze **Examenbundel**?
Ga dan naar examenbundel.nl/contact.

Opmerking
De overheid stelt de regels op voor het examen. Bijvoorbeeld wat de examenonderwerpen zijn, welke hulpmiddelen je mag gebruiken en wanneer het examen is. De auteurs en uitgever hebben deze **Examenbundel** met grote zorg samengesteld. Soms veranderen de regels van de overheid echter of worden er nieuwe afspraken gemaakt over wat die regels betekenen. Raadpleeg daarom altijd je docent of onze website www.examenbundel.nl voor actuele informatie die voor jouw examen van belang is.

© ThiemeMeulenhoff

Inhoud

3 **Voorwoord**
7 **Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?**
13 **Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?**

Oriëntatietoets

17 Opgaven

Deel 1
Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden
23 Opgaven
27 Hints - uitwerkingen

2 Functies (lineair, machts-, wortel-, gebroken)
33 Opgaven
44 Hints - uitwerkingen

3 Exponentiële en logaritmische functies
54 Opgaven
64 Hints - uitwerkingen

4 Periodieke functies
72 Opgaven
78 Hints - uitwerkingen

5 Veranderingen en afgeleide functies
84 Opgaven
93 Hints - uitwerkingen

6 Berekeningen in de meetkunde
101 Opgaven
108 Hints - uitwerkingen

7 Cirkels en lijnen
113 Opgaven
119 Hints - uitwerkingen

Deel 2a
Examens met uitwerkingen

Examen 2016-I
129 Opgaven
137 Hints - uitwerkingen

Examen 2016-II
143 Opgaven
152 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-I
159 Opgaven
168 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-II
175 Opgaven
186 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-I
192 Opgaven
202 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-II
208 Opgaven
218 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-I
223 Opgaven
234 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-II
242 Opgaven
252 Hints - uitwerkingen

Deel 2b
Examen zonder uitwerkingen

Examen 2021-I
261 Opgaven

Bijlagen

Cijferbepaling
Onderwerpregister
Examenwerkwoorden
Afrondregels

Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?

Natuurlijk kun je de **Examenbundel** van voor naar achter doorwerken of er kriskras wat onderdelen uithalen om mee te oefenen, maar je kunt het ook systematischer aanpakken. Als je oefenen met de **Examenbundel** combineert met leren uit **Samengevat**, bereid je je optimaal voor op je examen.

Op de volgende pagina's vind je drie routes die laten zien hoe je kunt leren met de **Examenbundel**. Kies de route die past bij jouw manier van leren:

- Route 1: Ga je graag meteen aan de slag? Start met **oefenen per onderwerp**.
- Route 2: Wil je eerst weten waar je staat? Start met **de oriëntatietoets**.
- Route 3: Leer je liever eerst de theorie? Start met **leren per onderwerp**.

Wil je weten wat je leerstijl is?

Kies de route die bij jouw manier van leren past!

Lees ook de tips! Voorkom verrassingen tijdens je examen.

#ikgazekerslagen

Route 1

Ga je graag meteen aan de slag? Start met oefenen per onderwerp.

januari & februari

- Maak per week opgaven van een hoofdstuk in deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
  - De helft of minder goed.
    - Neem het bijbehorende hoofdstuk in Samengevat door.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints. → Maak de oriëntatietoets.

maart

- Maak de oriëntatietoets.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
- Bestudeer Samengevat over de onderwerpen die minder goed gingen.
- Oefen opgaven uit deel 1 van de Examenbundel en via het onderwerpregister uit de verschillende examens over het betreffende onderwerp. Gebruik de hints!

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.
- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat. → Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

© ThiemeMeulenhoff
© ThiemeMeulenhoff

Route 2

Wil je eerst weten waar je staat? Start met de oriëntatietoets.

januari

- Maak de oriëntatietoets in de Examenbundel.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
    - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.

februari

- Bestudeer elk hoofdstuk in Samengevat.

maart

- Maak opgaven per onderwerp uit deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed.
  - De helft of minder goed.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints.

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

april

- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 3

Leer je liever eerst de theorie? Start met leren per onderwerp.

#

januari & februari

Bestudeer per week een hoofdstuk uit Samengevat.

maart

Maak de oriëntatietoets van de Examenbundel.

Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.

Voldoende.

Onvoldoende.

Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.

Maak de opgaven uit deel 1 over die onderwerpen.

Kijk die opgaven na.

Meer dan de helft goed.

De helft of minder goed.

Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.

april

Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.

Tevreden met het resultaat.

Niet tevreden met het resultaat.

Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!

Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.

Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

© ThiemeMeulenhoff

Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?

Bij het op de juiste manier oplossen van een probleem doorloop je in het algemeen drie stappen: de voorbereiding, de uitvoering en een controle.

Voorbereiding

- Kijk eerst vluchtig alle opgaven door en begin met de opgaven die je vertrouwd voorkomen.
- Ga na hoeveel tijd beschikbaar is per opgave.
- Lees de tekst van de gekozen opgave rustig en nauwkeurig. Onderstreep of markeer hierbij aanwijzingen, begrippen, formules, getallen e.d. die van belang kunnen zijn. Deze informatie is dan bij het beantwoorden van de vragen snel terug te vinden.
- Lees elke vraag nauwkeurig, maak een schets en ga na welke informatie je nodig denkt te hebben om de vraag te kunnen beantwoorden.
- Als in een vraag staat ‘los op, benader of bereken’ dan mag de grafische rekenmachine gebruikt worden om het antwoord te vinden. Als in een vraag staat ‘bereken algebraïsch of bereken exact’ dan wordt er naar een berekening gevraagd. De grafische rekenmachine gebruik je dan alleen ter controle.
- Bepaal welke tussenstappen je bij de beantwoording van de vraag zult moeten maken. Deze worden bepaald door het ‘gat’ dat er zit tussen de gegevens en het gevraagde. Je kunt daarbij zowel van de gegevens als van het gevraagde uitgaan.
- Begin pas aan de uitvoering, wanneer je de aanpak van het vraagstuk overziet.

Uitvoering

- Reserveer op je papier voor elke opgave voldoende ruimte. Je werk wordt daardoor overzichtelijker en je kunt je antwoord makkelijker aanvullen.
- Schrijf alle tussenstappen overzichtelijk op, zodat zichtbaar wordt hoe je tot je antwoord bent gekomen.
- Indien om uitleg wordt gevraagd, mag die niet ontbreken.
- Schrijf bij twijfel altijd iets op (behalve als je zelf al kunt beoordelen dat je antwoord nergens op slaat).

Controle

- Lees de vraag nog eens over. Is hij volledig beantwoord?
- Vind je het gevonden antwoord zinnig (klopt bv. de orde van grootte)? Zo niet, probeer je denk- of rekenfout op te sporen of maak daarover tenminste een opmerking.
- Is de juiste eenheid vermeld?
- Is de afronding van een verkregen waarde in overeenstemming met de vraagstelling? Let op het juiste aantal cijfers achter de komma.

© ThiemeMeulenhoff

Hoe zou je het nu al doen op een examen? De oriëntatietoets geeft je een eerste indruk. De antwoorden vind je op mijn.examenbundel.nl.

Oriëntatietoets

Oriëntatietoets

Overlevingstijd

Als iemand in koud water terecht komt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 ºC ontstaat een levensbedreigende situatie. De overlevingstijd van personen die te water raken, is niet alleen afhankelijk van de watertemperatuur. De kleding die een persoon draagt, is ook van invloed op de overlevingstijd.

In de tabel staan watertemperaturen met bijbehorende overlevingstijden voor perso-nen in zwemkleding.

watertemperatuur *T* in ºC	5,0	10	15	20
overlevingstijd *Z* in uren	0,5	1,0	2,0	4,0

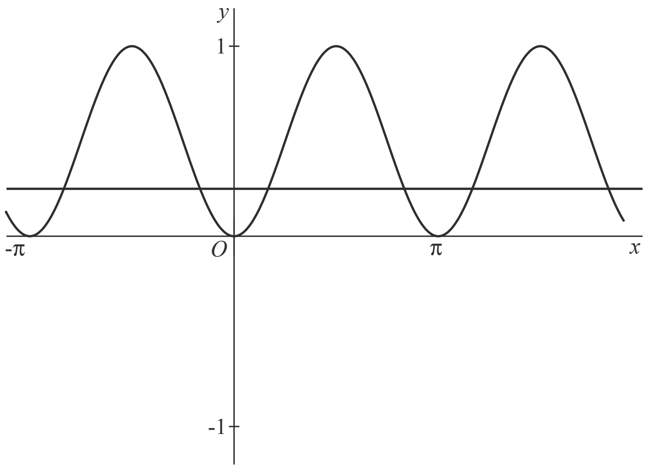
Veronderstel dat er een exponentieel verband bestaat tussen *T* en *Z*.

3p **1** Stel een hierbij passende formule op voor het verband tussen *T* en *Z*.

Sinusoïde

Van een sinusoïde zijn de punten (0, 0) en $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ twee opeenvolgende toppen.

In de figuur zie je de sinusoïde en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$



Deze sinusoïde kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \cdot \sin(c(x - d))$.

4p **2** Bepaal mogelijke waarden van *a*, *b*, *c* en *d*.

Een andere formule die deze sinusoïde beschrijft, is $y = (\sin(x))^2$.
In de figuur zijn zes snijpunten te zien van de sinusoïde met de lijn $y = \frac{1}{4}$.

4p **3** Bereken exact de *x*-coördinaten van deze zes snijpunten.

Wortelfunctie

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 12}$.

De lijn met vergelijking $y = 2x - 5$ en de grafiek van *f* snijden elkaar niet.

5p **4** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Er bestaat precies één lijn die evenwijdig is aan de lijn $y = 2x - 5$ en die raakt aan de grafiek van *f*.

7p **5** Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van deze lijn op.

Cirkel en lijnen

Gegeven is punt $A(5, 5)$ en cirkel *c* met vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 19 = 0$.

3p **6** Onderzoek met een berekening of punt *A* op, binnen of buiten de cirkel ligt.

Lijn *k* gaat door de punten *A* en $B(1, 3)$.

3p **7** Bereken de hoek die lijn *k* met de *x*-as maakt.

Lijn *m* snijdt lijn *k* loodrecht in *A*.

6p **8** Bereken de *x*-coördinaten van de snijpunten van *m* en *c*. Rond af op twee decimalen.

© ThiemeMeulenhoff

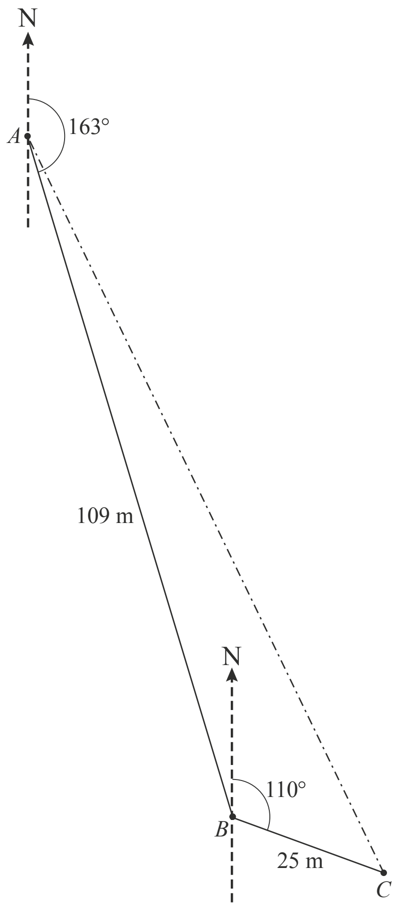
Geocaching

De laatste jaren is het gebruik van GPS (Global Positioning System) flink toegenomen. Met behulp van een GPS-ontvanger kunnen op iedere plaats op aarde de coördinaten van die plaats worden bepaald.

Een wereldwijd beoefende hobby waarbij gebruik gemaakt wordt van GPS is **geocaching**. Bij geocaching is het de bedoeling een **cache** – een soort schatkistje – te zoeken met behulp van een GPS-ontvanger en een **loopopdracht**.
Een loopopdracht bestaat uit twee onderdelen: een koers en een afstand. De koers is de hoek ten opzichte van het noorden in een geheel aantal graden. Hierbij worden hoeken gegeven ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee.
De afstand is gegeven in een geheel aantal meters.

De zoektocht naar de cache genaamd 'Haagse zoektocht' wordt als volgt beschreven:

- Parkeer de auto langs de kant van de weg op N52 16.351 E6 57.531. Dit is punt *A*.
- Loop vanaf punt *A* 109 meter met koers 163 graden. Dit is punt *B*.
- Loop vanaf punt *B* 25 meter met koers 110 graden naar de cache op punt *C*.



Zie de figuur.
Uit de gegevens volgt $\angle ABC = 127°$.

Het is mogelijk om in één loopopdracht vanaf punt *A* naar punt *C* te gaan. Hiervoor moet in *DABC* eerst de afstand *AC* berekend worden en vervolgens moet de koers van *A* naar *C* berekend worden.

6p **9** Bereken de koers en de afstand van deze loopopdracht.

© ThiemeMeulenhoff

Examenopgaven per onderwerp met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de antwoorden. Ook handig bij de voorbereiding op je schoolexamens!

Deel 1 Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden

Lineair

1 Stel een vergelijking op van de lijn door de punten (–3, 14) en (5, 2).

2 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen k: $5x + 3y = 12$ en m: $y = 2x - 7$.

3 Gegeven is een lijn k met vergelijking $0{,}4x + 2y = 6$
Lijn m snijdt lijn k loodrecht in het punt (20, –1).
Stel een vergelijking op voor m.

4 Een vergelijking van lijn k is $4x - 2y = 7$.
Bereken de hoek tussen k en de x-as.

Kwadratisch

5 Los exact op: $\frac{1}{3}x^2 - x - 6 = 0$

6 Los exact op: $4 - (3x - 2) = (4 - x)(x - 6)$

7 Los exact op: $x(x + 5) = x(2x - 1)$

8 Los exact op: $1 - x - x^2 = 0$

9 Schrijf zonder haakjes: $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2$

Cirkels en parabolen

10 De lijn $y = 3x - 14$ snijdt de cirkel met vergelijking $(x - 3)^2 + y^2 = 25$ in twee punten.
Bereken de coördinaten van de snijpunten.

11 De parabool p snijdt de assen in de punten (0, 4), (2, 0) en (–5, 0).
Stel een vergelijking op voor parabool p.

12 $x^2 + y^2 + 4x - 5y = 32$ is de vergelijking van een cirkel.
Bereken de straal en de coördinaten van het middelpunt van deze cirkel.

13 Een parabool waarvan de top $(-2, \frac{1}{2})$ is, gaat ook nog door het punt (1, –13).
Stel een vergelijking op voor deze parabool.

Hogere machten

14 Voor elke waarde van p is de functie h_p gegeven door $h_p(x) = (x + 4)(p + 4x - x^2)$.
Toon aan met behulp van algebra dat er een waarde van p is waarbij de bijbehorende functie gelijk is aan $f(x) = -x^3 + 27x + 44$.

© ThiemeMeulenhoff

15 De energieopbrengst E van een windmolen wordt bij windsnelheid w beschreven door de formule:

$E = 0{,}51 \cdot w^3$

Met hoeveel procent neemt de energieopbrengst van deze windmolen toe als de windsnelheid met 20% toeneemt?

Logaritmisch en exponentieel

16 Los exact op: $5^{2-x} = 25^{0{,}5x-3}$

17 Los exact op: ${}^3\log(5 - 4x) = 2 + {}^3\log(x)$

18 De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 2^{4x+1}$ en $g(x) = 4 \cdot 4^x$. Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van het snijpunt van de grafieken van f en g.

19 Los exact op: $3^{5-2x} > 3\sqrt{3}$

Wortels

20 Schrijf als een éénterm: $\sqrt{150} + \sqrt{24}$

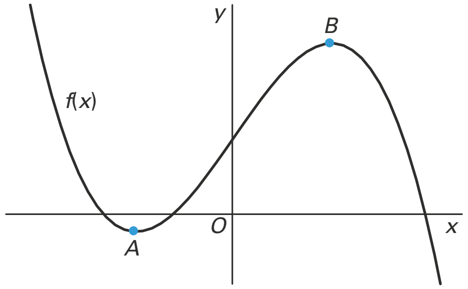
21 Schrijf als een éénterm: $\sqrt{9x} + \sqrt{0{,}25x}$

22 Los algebraïsch op: $5 = \sqrt{89 - 10x} + x$

23 Los algebraïsch op: $(x - 1)\sqrt{2x + 3} = x(x - 1)$

24 Gegeven is de functie $f(x) = 3 + (x + 2)\sqrt{x}$. Bereken met behulp van differentiëren de helling van de grafiek van f in het punt (1, 6).

25 De grafiek van $h(x) = (x + 4)(p + 4x - x^2)$ heeft twee toppen A en B. Punt A ligt links van de y-as, punt B rechts van de y-as (zie figuur).



Aangetoond kan worden dat de x-coördinaten x_A en x_B van deze twee toppen als volgt afhangen van de waarde van p: $x_A = -\sqrt{\frac{p+16}{3}}$ en $x_B = \sqrt{\frac{p+16}{3}}$

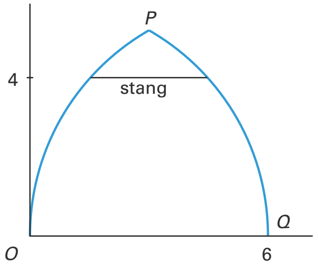
Bereken algebraïsch voor welke waarde van p geldt dat $x_B - x_A = 16$.

© ThiemeMeulenhoff

26 Al heel lang worden in bouwwerken boogconstructies gebruikt om grote ruimten te overspannen. Hiernaast zie je een wiskundig model van een zogeheten spitsboog. De cirkelbogen OP en PQ hebben dezelfde vorm. Voor de cirkelboog PQ geldt de volgende formule:

$h(x) = \sqrt{36 - x^2}$ met $3 \leq x \leq 6$ (x en h in meter).

Ter versteviging wil men tussen de bogen een horizontale stang aanbrengen op 4 meter hoogte. Laat zien dat de exacte lengte van deze stang $4\sqrt{5} - 6$ meter moet zijn.



Gebroken

27 Los exact op: $\frac{x}{x-4} = \frac{x}{5-x}$

28 Los exact op: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}$

29 Schrijf als één breuk: $\frac{1}{2}x\left(\frac{4}{x-1} + 6\right)$

30 Gegeven is de formule $P = \frac{6000}{115 - 0{,}01h}$

Bereken algebraïsch voor welke waarde van h de formule gelijk is aan 80.

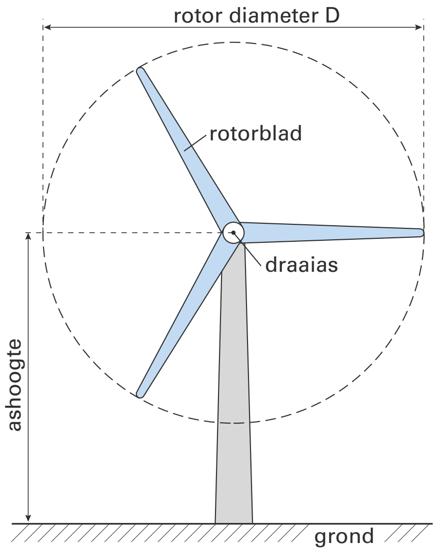
Formules herleiden

31 Gegeven is de functie $N = 4 \cdot 7^{0{,}5t-2}$. Schrijf t als functie van N.

32 Gegeven is de functie $D = 6{,}9\sqrt{T - 12}$. Schrijf T als functie van D.

33 Voor het vermogen van een zeker type windmolen (zie figuur) geldt de volgende formule: $P = 0{,}0001 \cdot V^3 \cdot D^2$ waarin P het vermogen in kW, V de windsnelheid in m/s en D de rotordiameter in m.

Een windmolen van dit type levert een vermogen van 750 kW.
Geef voor dit geval een formule waarin V wordt uitgedrukt in D.



© ThiemeMeulenhoff

34 De formule $\log(W) = 3 + 0{,}7 \cdot \log(L)$ kan worden omgewerkt tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^b$.
Bereken de waarden van a en b.

35 Laat zien dat de formule $q = 250v - 1{,}5625v^2$ afgeleid kan worden uit de formules
$k = 250 \cdot \left(1 - \frac{v}{160}\right)$ en $q = v \cdot k$

Hints bij hoofdstuk 1

1 De vergelijking van een lijn heeft de vorm $y = ax + b$, waarin a de helling is.
2 In de formule van k vervangen we y door de formule van m.
3 Voor lijnen die loodrecht op elkaar staan geldt: $rc_k \cdot rc_m = -1$.
4 tan(hoek tussen k en de x-as) = rc_k.
5 Vermenigvuldig elke term met drie en ontbind in factoren.
6 Haakjes verdrijven en sorteren.
7 Gebruik de regel: $A \cdot B = A \cdot C \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$
8 Ontbinden in factoren lukt niet. Dan de *abc*-formule.
9 Merkwaardig product: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
10 Substitueer $y = 3x - 14$ in de cirkelvergelijking.
11 Gebruik de nulpuntenvorm van een parabool: $f(x) = a(x - p)(x - q)$.
12 Kwadraatafsplitsen.
13 Gebruik de topvorm van een parabool: $f(x) = a(x - r)^2 + s$.
14 Schrijf h zonder haakjes en vergelijk het resultaat met de functie $f(x)$.
15 w neemt toe met 20% tot $1{,}2w$
16 Vervang 25 door 5^2 en gebruik de rekenregel $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
17 Vervang 2 door ${}^3\log(9)$ en pas de optelregel voor logaritmen toe.
18 Herleid alle machten tot hetzelfde grondtal (bijvoorbeeld 2, maar 4 kan ook).
19 Los eerst de bijbehorende vergelijking op. Schets de grafieken om het antwoord te kunnen aflezen.
20 Beide wortels splitsen.
21 Beide wortels splitsen.
22 Eerst de wortel isoleren, daarna kwadrateren en controleren.
23 Gebruik $A \cdot B = C \cdot A \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$. Direct kwadrateren loopt vast.
24 Schrijf f zonder haakjes en met machten om te kunnen differentiëren.
25 $x_B - x_A = 16$ herleiden tot een vorm met één wortel. Oplossen door kwadrateren.
26 Bereken voor welke waarde van x de stang de boog ondersteunt.
27 Kruislings vermenigvuldigen.
28 In linkerlid noemers gelijk maken en de breuken optellen. Daarna kruislings vermenigvuldigen.
29 Zonder haakjes schrijven, gelijknamig maken en optellen.
30 Stel de formule gelijk aan 80. Gebruik $\frac{A}{B} = C \Rightarrow \frac{A}{C} = B$ (mits B en C niet nul zijn).
31 Gebruik de regel: $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$
32 Kwadrateren.
33 $P = 750$ invullen en V vrijmaken.
34 Gebruik de regels: ${}^g\log(a) = x \Leftrightarrow a = g^x$ en $g^{{}^g\log(a)} = a$.
35 Substitueer de gegeven formule voor k in $q = v \cdot k$

Uitwerkingen bij hoofdstuk 1

Lineair

1 De vergelijking heeft de vorm $y = ax + b$, waarin a de helling of richtingscoëfficiënt is.
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-14}{5--3} = \frac{-12}{8} = -1{,}5$. Deze waarde van a samen met de coördinaten van (5, 2) invullen geeft: $2 = -1{,}5 \cdot 5 + b \;\Leftrightarrow\; b = 9{,}5$.
De gevraagde vergelijking is $y = -1{,}5x + 9{,}5$.

2 $y = 2x - 7$ invullen in de vergelijking van k geeft: $5x + 3(2x - 7) = 12 \;\Leftrightarrow$
$5x + 6x - 21 = 12 \;\Leftrightarrow\; 11x = 33 \;\Leftrightarrow\; x = 3$. Hierbij hoort $y = 2 \cdot 3 - 7 = -1$.
Het snijpunt van k en m is (3, –1).

3 $0{,}4x + 2y = 6 \;\Leftrightarrow\; 2y = -0{,}4x + 6 \;\Leftrightarrow\; y = -0{,}2x + 3$ dus $rc_k = -0{,}2$.
Lijn m snijdt lijn k loodrecht dus $rc_k \cdot rc_m = -1 \;\Leftrightarrow\; -0{,}2 \cdot rc_m = -1 \;\Leftrightarrow\; rc_m = 5$
m: $y = 5x + b$ snijdt k in (20, –1) $\Rightarrow\; -1 = 5 \cdot 20 + b \;\Leftrightarrow\; b = -101$
Een vergelijking van m is: $y = 5x - 101$

4 *Rekenmachine instellen op graden.*
$4x - 2y = 7 \;\Leftrightarrow\; -2y = -4x + 7 \;\Leftrightarrow\; y = 2x - 3{,}5$
tan(hoek) = 2 $\Rightarrow$ de gevraagde hoek is ongeveer 63,4°.

Kwadratisch

5 $\frac{1}{3}x^2 - x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 3x - 18 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-6)(x+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 6 \text{ of } x = -3$

6 $4 - (3x - 2) = (4 - x)(x - 6) \;\Leftrightarrow\; 4 - 3x + 2 = 4x - 24 - x^2 + 6x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 13x + 30 = 0 \;\Leftrightarrow$
$(x - 10)(x - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 10 \text{ of } x = 3$

7 $x(x + 5) = x(2x - 1) \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ of } x + 5 = 2x - 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ of } x = 6$

8 *abc*-formule met $a = -1$, $b = -1$ en $c = 1$:
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot -1 \cdot 1}}{2 \cdot -1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ of } x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

9 $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

Cirkels en parabolen

10 Substitueer $y = 3x - 14$ in de cirkelvergelijking:
$(x - 3)^2 + (3x - 14)^2 = 25 \Leftrightarrow$
$x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 84x + 196 = 25 \Leftrightarrow$
$10x^2 - 90x + 180 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 6)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \text{ of } x = 3$
$x = 6$ geeft $y = 3 \cdot 6 - 14 = 4$ en $x = 3$ geeft $y = 3 \cdot 3 - 14 = -5$
De coördinaten van de snijpunten zijn (6, 4) en (3, –5).

11 De nulpunten zijn $x = 2$ en $x = -5$ dus een vergelijking heeft de vorm
$f(x) = a(x - 2)(x + 5)$. Hierin het snijpunt (0, 4) met de y-as invullen:
$f(0) = a(0 - 2)(0 + 5) = 4 \Leftrightarrow -10a = 4 \Leftrightarrow a = -0{,}4$
Een vergelijking van p is $f(x) = -0{,}4(x - 2)(x + 5)$.

12 Kwadraatafsplitsen: $x^2 + y^2 + 4x - 5y = 32 \Leftrightarrow$
$x^2 + 4x + y^2 - 5y = 32 \Leftrightarrow$
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 5y + 6{,}25 = 32 + 4 + 6{,}25 \Leftrightarrow$
$(x + 2)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 42{,}25$
Het middelpunt van de cirkel is (–2; 2,5) en de straal is $\sqrt{42{,}25} = 6{,}5$

13 De top is $(-2, \frac{1}{2})$ dus een vergelijking van de parabool heeft de vorm
$f(x) = a(x + 2)^2 + \frac{1}{2}$.
Hierin de coördinaten (1, –13) invullen:
$f(1) = a\,(1 + 2)^2 + \frac{1}{2} = -13 \Leftrightarrow 9a + \frac{1}{2} = -13 \Leftrightarrow 9a = -13\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -1\frac{1}{2}$
Een vergelijking van deze parabool is: $f(x) = -1\frac{1}{2}(x + 2)^2 + \frac{1}{2}$

Hogere machten

14 $h_p(x) = (x + 4)(p + 4x - x^2)$ zonder haakjes schrijven:
$h_p(x) = px + 4x^2 - x^3 + 4p + 16x - 4x^2 \Leftrightarrow$
$h_p(x) = -x^3 + px + 16x + 4p \Leftrightarrow$
$h_p(x) = -x^3 + (p + 16)x + 4p \Leftrightarrow$
Als $h_p(x) = f(x) = -x^3 + 27x + 44$ dan moet $4p$ gelijk aan 44 zijn, dus $p = 11$.
De coëfficiënt van x wordt dan 11 + 16 = 27, dus dat klopt ook.
Voor $p = 11$ zijn f en h gelijk.

15 w neemt toe met 20% tot $1{,}2w$, dus E_{oud} neemt toe tot:
$E_{nieuw} = 0{,}51 \cdot (1{,}2w)^3 = 0{,}51 \cdot (1{,}2)^3 \cdot w^3 = (1{,}2)^3 \cdot 0{,}51 \cdot w^3 = 1{,}728 \cdot E_{oud}$
De energieopbrengst neemt met 72,8% toe.

Logaritmisch en exponentieel

16 $5^{2-x} = 25^{0{,}5x-3} \;\Leftrightarrow\; 5^{2-x} = (5^2)^{0{,}5x-3} \;\Leftrightarrow\; 5^{2-x} = 5^{x-6} \;\Leftrightarrow\; 2 - x = x - 6 \;\Leftrightarrow$
$-2x = -8 \;\Leftrightarrow\; x = 4$

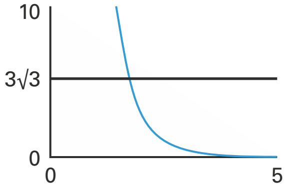
17 Domein bepalen: $5 - 4x > 0$ en $x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 1{,}25$ en $x > 0 \;\Leftrightarrow$
het domein is $0 < x < 1{,}25$
${}^3\log(5 - 4x) = 2 + {}^3\log(x) \;\Leftrightarrow\; {}^3\log(5 - 4x) = {}^3\log(9) + {}^3\log(x) \;\Leftrightarrow$
${}^3\log(5 - 4x) = {}^3\log(9x) \;\Rightarrow\; 5 - 4x = 9x \;\Leftrightarrow\; 5 = 13x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{5}{13}$
De gevonden oplossing ligt in het domein.

18 Schrijf alle factoren van de vergelijking $f(x) = g(x)$ met grondtal 2:
$2^{4x+1} = 4 \cdot 4^x \;\Leftrightarrow\; 2^{4x+1} = 2^2 \cdot (2^2)^x \;\Leftrightarrow\; 2^{4x+1} = 2^2 \cdot 2^{2x} \;\Leftrightarrow\; 2^{4x+1} = 2^{2+2x} \;\Leftrightarrow$
$4x + 1 = 2 + 2x \;\Leftrightarrow\; 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0{,}5$
$f(0{,}5) = 2^{4 \cdot 0{,}5 + 1} = 8$ dus de coördinaten van het snijpunt zijn (0,5; 8).
andere manier met grondtal 4
$2^{4x+1} = 4 \cdot 4^x \Leftrightarrow (2^2)^{2x+0{,}5} = 4^1 \cdot 4^x \Leftrightarrow 4^{2x+0{,}5} = 4^{1+x} \Leftrightarrow 2x + 0{,}5 = 1 + x \Leftrightarrow x = 0{,}5$
$f(0{,}5) = 2^{4 \cdot 0{,}5 + 1} = 8$ dus de coördinaten van het snijpunt zijn (0,5; 8).

19 Eerst $3^{5-2x} = 3\sqrt{3}$ oplossen:

$3^{5-2x} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{5-2x} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{1\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 5 - 2x = 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = -3\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1\frac{3}{4}$

Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 3^{5-2x}$ en $y_2 = 3\sqrt{3}$.



In de grafiek is nu het antwoord op de vraag af te lezen: $x < 1\frac{3}{4}$

De vergelijking oplossen met intesect *is hier niet toegestaan.*

Wortels

20 $\sqrt{150} + \sqrt{24} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$

21 $\sqrt{9x} + \sqrt{0{,}25x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{x} = 3\sqrt{x} + 0{,}5\sqrt{x} = 3{,}5\sqrt{x}$

22 $5 = \sqrt{89 - 10x} + x \Leftrightarrow 5 - x = \sqrt{89 - 10x} \Rightarrow (5-x)^2 = \left(\sqrt{89 - 10x}\right)^2 \Leftrightarrow$
$25 - 10x + x^2 = 89 - 10x \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = 8$ of $x = -8$
Controleren:
$x = 8$ invullen: $5 = \sqrt{89 - 10 \cdot 8} + 8 \Leftrightarrow 5 = 3 + 8$ klopt niet.
$x = -8$ invullen: $5 = \sqrt{89 - 10 \cdot -8} - 8 \Leftrightarrow 5 = 13 - 8$ klopt wel.
De oplossing $x = 8$ voldoet niet, dus het antwoord is $x = -8$.

23 $(x-1)\sqrt{2x+3} = x(x-1) \Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $\sqrt{2x+3} = x \Rightarrow x = 1$ of $2x + 3 = x^2 \Leftrightarrow$
$x = 1$ of $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 3$ of $x = -1$
Controleren (de oplossing $x = 1$ hoeft niet gecontroleerd te worden):
$x = 3$ invullen: $(3-1)\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3(3-1) \Leftrightarrow 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ klopt.
$x = -1$ invullen: $(-1-1)\sqrt{2 \cdot -1 + 3} = -1(-1-1) \Leftrightarrow -2 \cdot 1 = -1 \cdot -2$ klopt niet.
De oplossingen zijn $x = 1$ en $x = 3$.

24 $f(x) = 3 + (x+2)\sqrt{x} = 3 + x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 + x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = 3 + x^{1\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

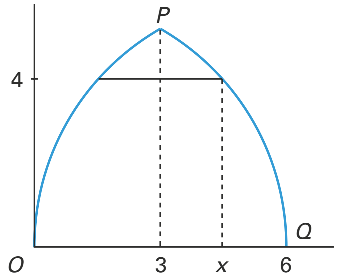
de afgeleide functie is $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f'(1) = 1\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 1\frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$ dus in het punt (1, 6) is de helling $2\frac{1}{2}$.

25 $x_B - x_A = 16 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p+16}{3}} - -\sqrt{\frac{p+16}{3}} = 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{p+16}{3}} = 16 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p+16}{3}} = 8 \Rightarrow$

$\frac{p+16}{3} = 64 \Leftrightarrow p + 16 = 192 \Leftrightarrow p = 176$ (en deze oplossing voldoet)

26 $h = 4$ meter $\Rightarrow \sqrt{36 - x^2} = 4 \Rightarrow 36 - x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow x = \sqrt{20} =$
$\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ dus de stang raakt de boog PQ voor $x = 2\sqrt{5}$



Vanuit het midden tot het uiteinde is de stang $2\sqrt{5} - 3$ meter lang dus de hele stang is $4\sqrt{5} - 6$ meter.

Gebroken

27 $\frac{x}{x-4} = \frac{x}{5-x} \Rightarrow x(x-4) = x(5-x) \Leftrightarrow x^2 - 4x = 5x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x = 0$
$x(2x - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 4{,}5$

28 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1(x-1)}{x(x-1)} + \frac{1x}{x(x-1)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1+x}{x(x-1)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$3x(x-1) = 2(2x-1) \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 4x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$
Nu de *abc*-formule met $a = 3$, $b = -7$ en $c = 2$:

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$ dus $x = 2$ of $x = \frac{1}{3}$

andere manier
$3x^2 - 7x + 2 = 0$ kan ook opgelost worden door ontbinden: $(3x-1)(x-2) = 0$

29 $\frac{1}{2}x\left(\frac{4}{x-1} + 6\right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x-1} + \frac{x}{2} \cdot 6 = \frac{2x}{x-1} + 3x = \frac{2x}{x-1} + \frac{3x(x-1)}{x-1} = \frac{2x + 3x(x-1)}{x-1} =$
$\frac{2x + 3x^2 - 3x}{x-1} = \frac{3x^2 - x}{x-1}$

30 $\frac{6000}{115 - 0{,}01h} = 80 \Rightarrow \frac{6000}{80} = 115 - 0{,}01h \Leftrightarrow 75 = 115 - 0{,}01h \Leftrightarrow 0{,}01h = 40 \Leftrightarrow h = 4000$

Functies herleiden

31 $N = 4 \cdot 7^{0{,}5t-2} \Leftrightarrow 0{,}25N = 7^{0{,}5t-2} \Leftrightarrow 0{,}5t - 2 = {}^{7}\log(0{,}25N) \Leftrightarrow$
$0{,}5t = {}^{7}\log(0{,}25N) + 2 \Leftrightarrow t = 2 \cdot {}^{7}\log(0{,}25N) + 4$

32 $D = 6{,}9\sqrt{T - 12} \Leftrightarrow \frac{D}{6{,}9} = \sqrt{T - 12} \Rightarrow \left(\frac{D}{6{,}9}\right)^2 = \left(\sqrt{T-12}\right)^2 \Leftrightarrow T - 12 = \left(\frac{D}{6{,}9}\right)^2 \Leftrightarrow$

$T = \left(\frac{D}{6{,}9}\right)^2 + 12$ of $T = \frac{D^2}{47{,}61} + 12$

33 $P = 750$ invullen in $P = 0{,}0001 \cdot V^3 \cdot D^2$ geeft:

$750 = 0{,}0001 \cdot V^3 \cdot D^2 \Leftrightarrow V^3 \cdot D^2 = \frac{750}{0{,}0001} = 7\,500\,000 \Leftrightarrow V^3 = \frac{7\,500\,000}{D^2} \Leftrightarrow$

$V = \sqrt[3]{\frac{7\,500\,000}{D^2}}$ of $V = \left(\frac{7\,500\,000}{D^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

34 $\log(W) = 3 + 0{,}7 \cdot \log(L) \Rightarrow$

$W = 10^{3 + 0{,}7 \cdot \log(L)} = 10^3 \cdot 10^{0{,}7 \cdot \log(L)} = 10^3 \cdot \left(10^{\log(L)}\right)^{0{,}7} = 1000 \cdot L^{0{,}7}$

dus $a = 1000$ en $b = 0{,}7$.

35 Door substitutie van $k = 250 \cdot \left(1 - \frac{v}{160}\right)$ in de formule $q = k \cdot v$ vinden we:

$q = 250 \cdot \left(1 - \frac{v}{160}\right) \cdot v = 250 \cdot \left(v - \frac{v^2}{160}\right) = 250v - \frac{250\,v^2}{160} = 250v - 1{,}5625\,v^2$

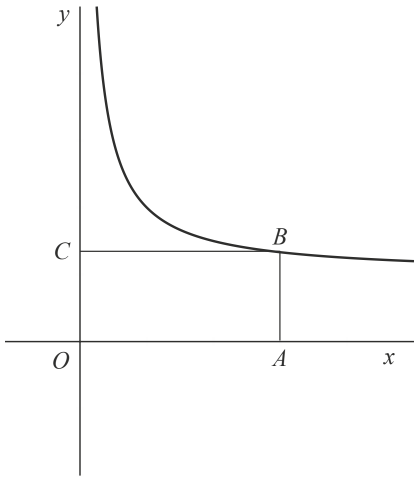
© ThiemeMeulenhoff

2 Functies (lineair, machts-, wortel-, gebroken)

Gebroken functie met rechthoek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ met $x > 0$.

Op de grafiek van f wordt een punt B gekozen. Daarna worden punt A op de x-as en punt C op de y-as zodanig gekozen dat vierhoek $OABC$ een rechthoek is. Zie figuur.



Van een punt B is gegeven dat de y-coördinaat $\frac{4}{3}$ is.

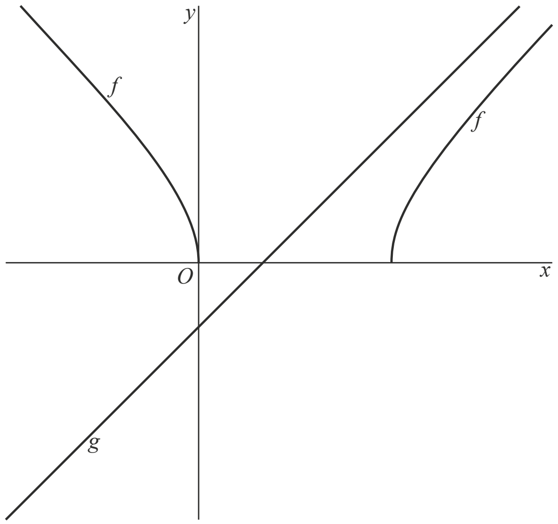
1 Bereken exact de omtrek van rechthoek $OABC$ in deze situatie.

Voor elk punt $B(b, \frac{1}{b} + 1)$ op de grafiek van f is de oppervlakte van rechthoek $OABC$ groter dan 1.

2 Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ voor $x \leq 0$ en voor $x \geq 6$.
De functie g is gegeven door $g(x) = x - 2$. In de figuur zijn de grafieken van f en g getekend.



3 Toon op algebraïsche wijze aan dat de grafieken van f en g geen snijpunt hebben.

© ThiemeMeulenhoff

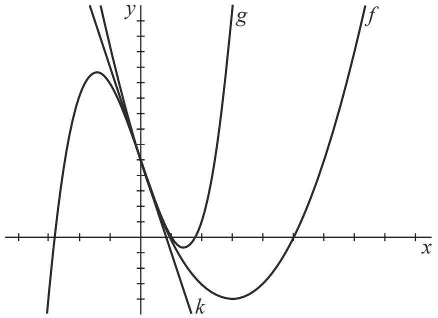
Machtsfuncties en rechte lijn

In deze opgave gaat het over functies die de som zijn van een machtsfunctie met een functievoorschrift van de vorm x^p (met $p > 1$) en de eerstegraadsfunctie k met het voorschrift $k(x) = –6x + 5$.
Zo zijn voor $p = 2$ en $p = 3$ de functies f en g gegeven door:

$f(x) = x^2 – 6x + 5$

$g(x) = x^3 – 6x + 5$

In de figuur zijn de grafieken van f en g, alsmede de lijn k getekend.



Zowel de lijn k als de grafieken van f en g gaan door het punt $M(0, 5)$.

4 Onderzoek met behulp van differentiëren of de hellingen van deze drie grafieken in dit punt gelijk zijn.

De grafiek van g snijdt de x-as in drie punten.
Het functievoorschrift van g is ook te schrijven als $g(x) = (x – 1)(x^2 + x – 5)$.

5 Bereken langs algebraïsche weg de exacte x-coördinaten van de drie snijpunten van de grafiek van g met de x-as.

De grafiek van g heeft twee toppen A en B.

6 Onderzoek of het punt $M(0, 5)$ exact het midden van lijnstuk AB is.

De functie h is gegeven door $h(x) = x^p – 6x + 5$, waarin $p > 1$.
Voor $p = 2$ en $p = 3$ ontstaan de functies f en g.

Er is een waarde van p waarvoor geldt dat de grafiek van h de x-as snijdt in het punt (2, 0).

7 Bereken exact deze waarde van p.

© ThiemeMeulenhoff

Windenergie

Om elektriciteit op te wekken, worden in gebieden waar het veel waait windmolenparken aangelegd. Windmolens zetten windenergie om in elektrische energie. Steeds vaker worden windmolenparken in zee aangelegd, omdat het boven open zee meestal harder waait dan boven land. Ook boven zee waait het echter niet altijd even hard en dat heeft gevolgen voor de hoeveelheid opgewekte elektrische energie.

De hoeveelheid energie die door wind wordt opgewekt, is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid.

Een kleine afname in de windsnelheid levert al een relatief grote afname in de hoeveelheid opgewekte energie op.

8 Bereken met hoeveel procent de hoeveelheid opgewekte energie daalt als de windsnelheid afneemt van 10,0 m/s naar 9,5 m/s. Rond je antwoord af op een geheel getal.

9 Bereken met hoeveel procent de windsnelheid moet toenemen om twee keer zoveel energie op te wekken. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Snelheid

Gegeven is de formule $s = \dfrac{t}{1 + \sqrt{t}}$

Hierin is s de afgelegde afstand in meters na t seconden.

10 Benader in m/s de snelheid op $t = 4$ door het differentiequotiënt te berekenen.
Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

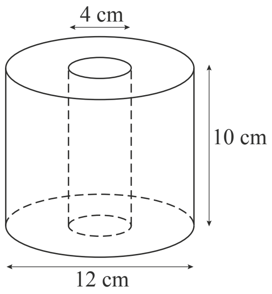
© ThiemeMeulenhoff

Toiletpapier

Toiletpapier zit vaak op een rol. In deze opgave wordt een wiskundig model van zo'n rol toiletpapier bekeken. In dit model is de rol een perfecte cilinder waaruit in het midden een cilinder is weggelaten. In de figuur wordt een volle rol toiletpapier weergegeven inclusief afmetingen.

foto

figuur



Het volume aan overgebleven toiletpapier op de rol hangt af van de diameter van de rol volgens de formule $V = \frac{5}{2}\pi d^2 - 40\pi$.

Hierbij is V het volume in cm^3 en d de diameter in cm. Het volume van een volle toiletrol is 320π cm^3.
Het aantal velletjes toiletpapier dat nog op de rol zit, is evenredig met het volume V.

Als van het toiletpapier uit de figuur de helft nog over is, is de diameter van de rol niet gehalveerd.

11 Bereken op algebraïsche wijze de diameter van de toiletrol volgens het model als de helft van het toiletpapier op de rol zit. Rond je antwoord af op een geheel aantal millimeter.

Op een volle rol als in de figuur zitten 500 velletjes. Hieruit volgt het volgende verband tussen het aantal velletjes toiletpapier n en de diameter d:

$$n = \frac{125d^2 - 2000}{32}$$

12 Toon de juistheid van deze formule aan.

Wortelfunctie

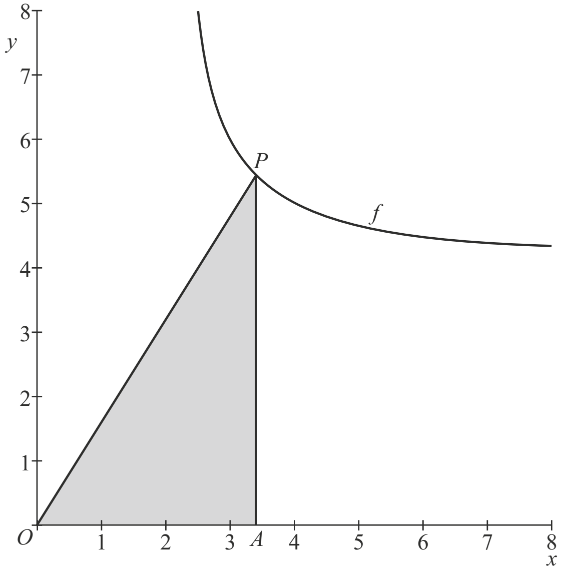
De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 12}$.
De functie g is gegeven door $g(x) = \sqrt{x}$.
De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties na elkaar toe te passen.

13 Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

Punt op hyperbool

In de figuur is de grafiek getekend van de functie f gegeven door

$f(x) = \frac{2}{x - 2} + 4$, met $x > 2$.



Op de grafiek van f ligt een punt P met x-coördinaat $x_P = a$. Punt A ligt recht onder P op de x-as en heeft dus dezelfde x-coördinaat als P.
De oppervlakte van driehoek OAP wordt gegeven door:

Oppervlakte $\Delta OAP = \frac{2a^2 - 3a}{a - 2}$

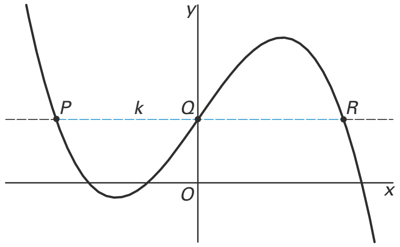
14 Toon dit aan op algebraïsche wijze.

Derdegraadsfunctie

Gegeven is de functie $f(x) = -x^3 + 27x + 44$

Q is het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. De lijn k door Q evenwijdig aan de x-as snijdt de grafiek ook nog in de punten P en R (zie figuur).

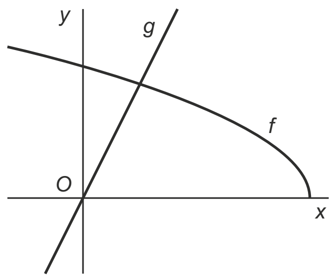
15 Bereken de exacte lengte van PR.



Wortel en lijn

In de figuur zijn de grafieken getekend van de functies

$f(x) = \sqrt{-2x + 12}$ en $g(x) = 2x$



16 Los op met algebra: $f(x) \leq g(x)$.

De grafiek van f wordt horizontaal verschoven. De beeldfiguur is de grafiek van een functie h. De grafiek van h snijdt de grafiek van g in het punt met x-coördinaat 1.

17 Stel een functievoorschrift op van de functie h. Licht je werkwijze toe.

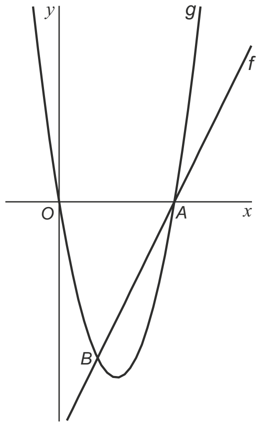
Lijn en parabool

In figuur 1 zijn in een assenstelsel een lijn en een parabool getekend.
De lijn is de grafiek van de functie $f(x) = 2x - 12$
De parabool is de grafiek van de functie $g(x) = x^2 - 6x$

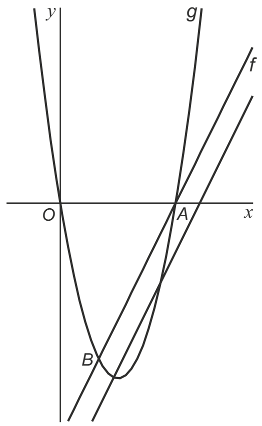
De lijn en de parabool snijden elkaar in de punten A en B.

18 Bereken de exacte lengte van het lijnstuk AB.

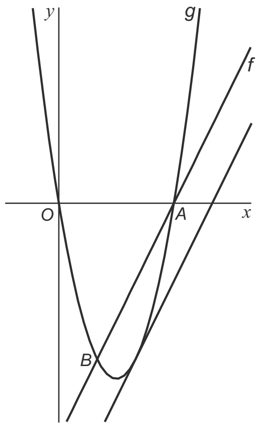
figuur 1



figuur 2



figuur 3



Door de grafiek van f omlaag te schuiven ontstaat een situatie, waarbij de lijn twee andere snijpunten dan A en B met de parabool heeft (zie figuur 2). Wanneer de lijn verder omlaag schuift, zal deze op een gegeven moment nog maar één punt met de parabool gemeenschappelijk hebben (zie figuur 3). In die situatie is deze lijn een raaklijn aan de parabool.

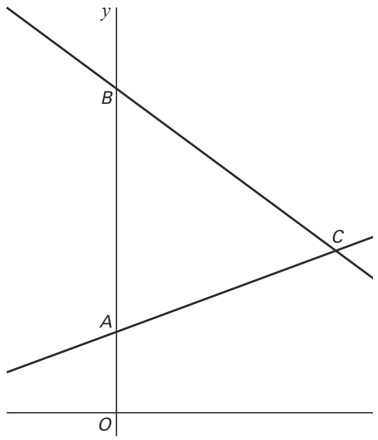
19 Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van deze raaklijn op.

© ThiemeMeulenhoff

Twee lijnen en een driehoek

Gegeven zijn de twee functies

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ en $g(x) = 8 - x$



De grafiek van f snijdt de y-as in punt A.
De grafiek van g snijdt de y-as in punt B.
De twee grafieken snijden elkaar in punt C.

20 Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

Lijn l is evenwijdig aan de y-as.
Lijn l snijdt de grafiek van f in punt S en de grafiek van g in punt T. Er geldt: $ST = 18$.

21 Bereken algebraïsch de mogelijke coördinaten van S en T.

22 Bereken de scherpe hoek tussen de grafieken van f en g.
Rond af op hele graden.

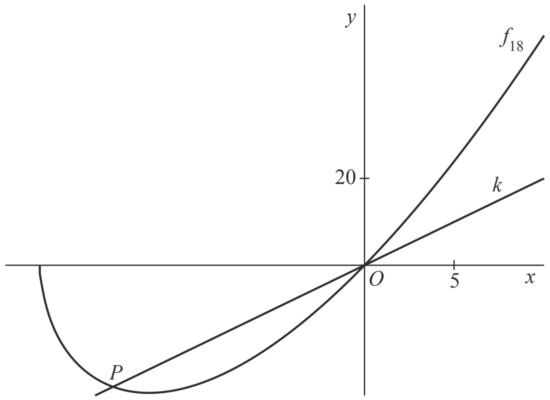
Functies met een wortel

Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x\sqrt{x + a}$.

Er is een waarde van a waarvoor het punt (27,108) op de grafiek van f_a ligt.

23 Bereken exact deze waarde van a.

De functie f_{18} is gegeven door $f_{18}(x) = x\sqrt{x + 18}$.
In de figuur zijn de grafiek van f_{18} en de lijn k met vergelijking $y = 2x$ getekend.



De lijn k snijdt de grafiek van f_{18} in twee punten: $O(0, 0)$ en het punt P.

24 Bereken exact de lengte van het lijnstuk OP.

De grafiek van f_{18} wordt 18 naar rechts geschoven.
Zo ontstaat de grafiek van de functie g, met $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

25 Toon op algebraïsche wijze aan dat het gegeven functievoorschrift van g inderdaad bij deze verschuiving hoort.

© ThiemeMeulenhoff

Overlevingstijd

Als iemand in koud water terecht komt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 ºC ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 ºC wordt de **overlevingstijd** genoemd.

Bij de eerste drie vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. Voor deze persoon geldt de volgende formule:

$$R = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T} \qquad \text{met } R > 0 \text{ en } T \geq 5{,}0$$

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in ºC.

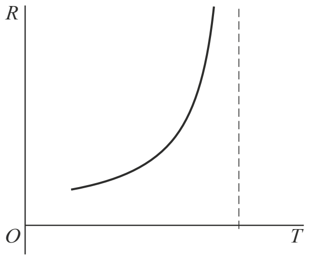
Bij een watertemperatuur van 20 ºC is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 ºC.

26 Bereken hoeveel keer zo groot.

27 Bereken op algebraïsche wijze de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

In de figuur is de grafiek van R als functie van T geschetst. De grafiek heeft een verticale asymptoot.

28 Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort **en** leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.



In de figuur is ook te zien dat de grafiek van R stijgend is. Dit kan worden aangetoond door de functie R te differentiëren.

29 Beredeneer met behulp van differentiëren dat de grafiek van R stijgend is.

Geluidssnelheid in de atmosfeer

Men gaat er vaak vanuit dat de geluidssnelheid in lucht 340 meter per seconde is. Dat is niet helemaal waar. In werkelijkheid hangt de snelheid van het geluid af van de temperatuur. Bij windstil weer wordt het verband bij benadering weergegeven door de volgende formule:

$$V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$$

Hierbij is V de snelheid van het geluid in meter per seconde bij een temperatuur van T graden Celsius.

In de twintigste eeuw varieerde de temperatuur in Nederland van –27,4 °C tot 38,6 °C.
De laagste temperatuur van –27,4 °C werd op 27 januari 1942 in Winterswijk geme-ten. De hoogste temperatuur van 38,6 °C werd op 23 augustus 1944 in Warnsveld bereikt.
Neem aan dat de temperaturen gemeten zijn bij windstil weer.

30 Bereken het verschil van de geluidssnelheden bij deze twee temperaturen.

Bij de volgende vragen gaan we steeds uit van een temperatuur van 15 °C op 0 km hoogte.

In de atmosfeer neemt de temperatuur tot op 10 km hoogte lineair af tot –50 °C volgens de formule $T = 15 - 6{,}5h$. Hierbij is h de hoogte in kilometer.

Als deze formule wordt gecombineerd met de formule $V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kan worden afgeleid dat voor het verband tussen V en h bij benadering de volgende formule geldt:

$$V = 331\sqrt{1{,}0549 - 0{,}0238h}$$

31 Leid deze formule af.

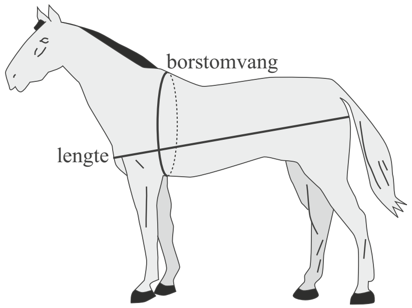
Een grote afstand, zoals bijvoorbeeld Amsterdam - Toronto, moet met een passagiersvliegtuig snel afgelegd kunnen worden. Dat kan alleen als het vliegtuig hoog vliegt omdat dan de luchtweerstand klein is. Voor passagiersvliegtuigen zoals de Boeing 747 mag de snelheid echter hoogstens 90% van de geluidssnelheid zijn.
Een Boeing 747 wil een snelheid maken van 975 km per uur (270,8 m/s).

32 Bereken tot op welke hoogte dit vliegtuig kan vliegen.
Geef het antwoord in kilometers afgerond op één decimaal.

Het gewicht van een paard

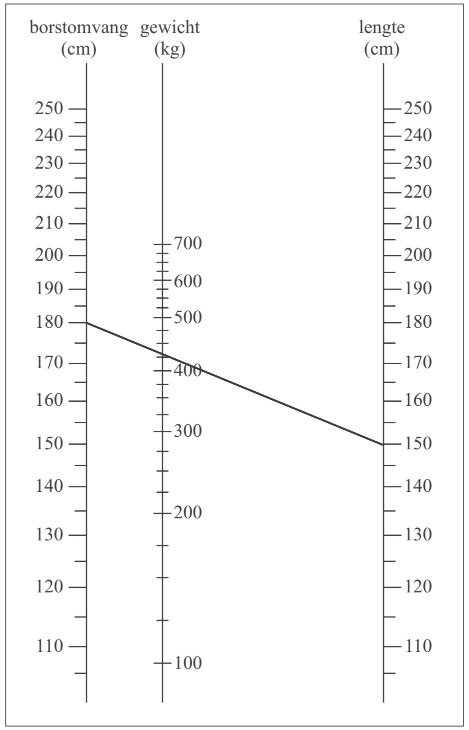
Voor mensen die paarden verzorgen is het belangrijk om te weten hoe zwaar hun paard is. Het gewicht van een paard kan worden geschat met behulp van twee afmetingen: de borstomvang en de lengte.
Zie figuur 1.

figuur 1



Bij een van de methoden om met behulp van deze afmetingen het gewicht te schatten, maak je gebruik van een **nomogram**.
Zie figuur 2.

figuur 2



Het schatten met behulp van het nomogram gaat als volgt. Na meting van de borstomvang en de lengte van een paard worden deze als twee punten op de bijbehorende verticale assen in het nomogram aangegeven. Het snijpunt van de lijn door deze twee punten met de middelste as (gewicht) geeft een schatting van het gewicht van het paard.

In het nomogram zie je bijvoorbeeld dat een borstomvang van 180 cm en een lengte van 150 cm een schatting van het gewicht van het paard geeft van ongeveer 430 kg.

In vraag 33 bekijk je twee paarden met een even grote borstomvang. De lengte van het ene paard is 1,5 keer zo groot als die van het andere paard.

33 Kies een borstomvang en een lengte voor het kleinste paard en onderzoek met behulp van figuur 2 of het gewicht van het grootste paard ook 1,5 keer zo groot is als dat van het kleinste paard. Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Een andere methode om het gewicht van een paard te schatten aan de hand van de borstomvang en de lengte, maakt gebruik van formules.
Twee van zulke formules zijn de formule van Carroll en de formule van Jones:

$$G_C = \frac{B^2 \cdot L}{11900} \text{ en } G_J = \frac{B^{1,78} \cdot L^{0,97}}{3000}, \text{ met } 100 < B < 300 \text{ en } 100 < L < 200.$$

Hierin zijn G_C en G_J het gewicht in kg volgens respectievelijk Carroll en Jones.
B is de borstomvang in cm en L is de lengte in cm.

Voor paarden van hetzelfde ras geldt dat er een vaste verhouding is tussen de borstomvang en de lengte.
Een Belgisch trekpaard bijvoorbeeld is een zwaar gebouwd paard (zie foto 1) waarvoor deze verhouding gelijk is aan 3 : 2.

foto 1

Een bepaald Belgisch trekpaard heeft een lengte van 150 cm. Je kunt het gewicht van dit paard schatten met bovenstaande formules, maar ook met het nomogram. Bij dit paard komt het gewicht volgens het nomogram het best overeen met het gewicht volgens één van beide formules.

34 Welke van de twee formules is dit? Licht je antwoord toe.

De Arabische volbloed is een veel slanker paardenras. Zie foto 2. We gaan ervan uit dat bij dit ras de borstomvang en de lengte aan elkaar gelijk zijn.

foto 2

V is het verschil tussen de schattingen van het gewicht volgens de twee formules:

$$V = G_J - G_C$$

35 Onderzoek bij welke lengte van een Arabische volbloed het verschil V maximaal is.
Rond je antwoord af op een geheel aantal centimeters.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 2

1 Los $f(x) = \frac{4}{3}$ op om de lengte van *AB* te berekenen.

2 Druk de lengte en breedte van de rechthoek uit in *b*.

3 Los $f(x) = g(x)$ op door linker- en rechterlid te kwadrateren. Door kwadrateren kunnen echter nieuwe oplossingen ontstaan die niet voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking, dus elke oplossing moet worden gecontroleerd.

4 Bereken $f'(0)$ en $g'(0)$. Vergelijk de uitkomsten met de helling van lijn *k*.

5 *g* is al ontbonden in twee factoren. Stel beide factoren gelijk aan 0.

6 De toppen moeten exact bepaald worden. Gebruik hiervoor $g'(x)$.

7 Los de vergelijking $h(2) = 0$ exact op.

8 Een bijbehorende formule heeft de vorm $E = c \cdot w^3$.

9 Bij windsnelheid *v* is *E* twee keer zo groot als geldt: $c \cdot v^3 = 2 \cdot c \cdot w^3$

10 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4{,}01) - s(4)}{4{,}01 - 4}$

11 Los de vergelijking $V = 160\pi$ op.

12 Het verband tussen *n* en *V* heeft de vorm $n = c \cdot V$.
Bepaal de evenredigheidsconstante *c* met de gegevens van een volle rol.

13 Herschrijf de formule. Er zijn meerdere correcte oplossingen.
Let op de volgorde van de transformaties.

14 Gebruik de formule $opp\ driehoek = \frac{1}{2} \cdot basis \cdot hoogte$.

15 Bereken de coördinaten van punt *Q*. Dan is ook een vergelijking van *k* bekend.
Snijpunten van *f* en *k* exact bepalen.

16 $\sqrt{-2x + 12} = 2x$ oplossen door kwadrateren. Houd rekening met het domein van *f*.

17 Bereken het snijpunt van *g* en *h*. Zoek op de grafiek van *f* een punt op dezelfde hoogte.

18 Bereken de coördinaten van *A* en *B*. Vervolgens de stelling van Pythagoras gebruiken.

19 De raaklijn aan de grafiek van *g* moet dezelfde helling hebben als *f*.
Zoek het punt op de grafiek van *g* waar g' die betreffende waarde heeft.

20 Neem *AB* als basis van de driehoek. De hoogte is dan de afstand van *C* tot de *y*-as.

21 Maak eerst een formule voor *ST*. Los vervolgens algebraïsch op: $ST = 18$.
Er zijn twee oplossingen omdat *S* boven of onder *T* kan liggen.

22 Met de richtingscoëfficiënt kan de hoek tussen lijn en *x*-as worden berekend.

23 Vul de coördinaten in en bereken *a*.

24 Los exact op: $x\sqrt{x + 18} = 2x$ met behulp van de regel $A \cdot B = C \cdot A \Leftrightarrow A = 0$ of $B = C$.
Direct kwadrateren kan ook.

25 Vervang *x* door $x - 18$.

26 Vul $T = 10$ en $T = 20$ in en vergelijk de antwoorden.

27 Bereken *R* in minuten en vul het resultaat in de gegeven formule in.

28 Deze gebroken functie heeft een asymptoot als de noemer nul wordt.

29 Schrijf de breuk met een negatieve exponent. Differentiëren met de kettingregel.

30 Beide temperaturen invullen in de formule voor *V*.

31 $T = 15 - 6{,}5h$ invullen in de andere formule en het resultaat herleiden.

32 270,8 m/s mag niet meer zijn dan $0{,}9V$.

33 Verbind de gekozen borstomvang met de beide lengtes en lees de bijbehorende gewichten af.

34 Vul alle gegevens in de formules in en vergelijk de uitkomst met het gewicht dat het nomogram geeft.

35 Gebruik $B = L$ om voor *V* een formule op te stellen die alleen van *L* afhangt.
Maximum zoeken met de rekenmachine of met behulp van de afgeleide van *V*.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 2

Gebroken functie met een rechthoek

1 Voor de x-coördinaat van punt B geldt: $\frac{1}{x}+1=\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=3$
De exacte omtrek van $OABC$ is $2 \cdot OA + 2 \cdot AB = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4}{3} = 6 + 2\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$.

2 *oppervlakte rechthoek* $OABC = OA \cdot AB = b \cdot (\frac{1}{b}+1) = b \cdot \frac{1}{b} + b \cdot 1 = 1 + b$
Omdat b positief is, is de oppervlakte van rechthoek $OABC$ altijd groter dan 1.

Wortelfunctie

3 Als de grafieken wel een snijpunt hebben, dan moet dat te vinden zijn uit de vergelijking
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-6x} = x-2$
Kwadrateren van linker- en rechterlid geeft: $\left(\sqrt{x^2-6x}\right)^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow$
$x^2-6x = x^2-4x+4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$
Vanwege het kwadrateren moet deze oplossing nog gecontroleerd worden:
$f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 6 \cdot -2} = 4$ en $g(-2) = -2-2 = -4$ dus de gevonden oplossing voldoet niet $\Rightarrow f(x) = g(x)$ heeft geen oplossing $\Rightarrow$ de grafieken van f en g snijden elkaar niet.

Machtsfuncties en rechte lijn

4 De helling van de rechte lijn $k(x) = -6x + 5$ in punt $M(0, 5)$ is -6.
$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$. In punt M is de helling $f'(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6$.
$g(x) = x^3 - 6x + 5 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6$. In punt M is de helling $g'(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 = -6$.
De drie grafieken k, f en g hebben in punt M alle drie dezelfde helling.

5 $g(x) = (x-1)(x^2+x-5) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ of $x^2 + x - 5 = 0$
Het eerste nulpunt dat gevonden wordt is $x = 1$. De beide andere kunnen met de *abc*-formule worden gevonden uit $x^2 + x - 5 = 0$.
$a = 1$, $b = 1$ en $c = -5 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$
De drie nulpunten zijn $x = 1$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ en $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{21}$

6 *Het onderzoek moet exact zijn, dus de toppen mogen niet met de rekenmachine berekend worden.*
$g(x) = x^3 - 6x + 5 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6$
In de toppen A en B is de helling 0, dus $g'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 6 \Leftrightarrow$
$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$
Het gemiddelde hiervan is $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = 0$ dus dat klopt met de x-coördinaat van M.
Nu de y-coördinaten van de toppen berekenen:
$g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} + 5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 5 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 5 = -4\sqrt{2} + 5$
$g(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 6(-\sqrt{2}) + 5 = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 5 = 4\sqrt{2} + 5$
Het gemiddelde van de y-coördinaten is $\frac{-4\sqrt{2}+5 \; + \; 4\sqrt{2}+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$ en dat klopt met de y-coördinaat van M.
$M(0, 5)$ is exact het midden van het lijnstuk AB.

7 Het punt (2, 0) ligt op de grafiek van $h \Leftrightarrow h(2) = 0 \Leftrightarrow 2^p - 6 \cdot 2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$
$2^p - 12 + 5 = 0 \Leftrightarrow 2^p = 7 \Leftrightarrow p = {}^2\log(7)$

Windenergie

8 De hoeveelheid opgewekte energie is evenredig met de derdemacht van de windsnelheid, dus een bijbehorende formule heeft de vorm:
$E = c \cdot w^3$ waarin E de opgewekte energie, w de windsnelheid en c de evenredigheidsconstante is.
$E(10{,}0) = c \cdot 10{,}0^3 = 1000 \cdot c$ en $E(9{,}5) = c \cdot 9{,}5^3 = 857{,}375 \cdot c$ dus de
procentuele verandering is $\frac{E(9{,}5) - E(10{,}0)}{E(10{,}0)} \times 100 = \frac{857{,}375 \cdot c - 1000 \cdot c}{1000 \cdot c} \times 100 =$
$\frac{-142{,}625 \cdot c}{1000 \cdot c} \times 100 = -14{,}2625\% \Rightarrow$ afgerond daalt de opgewekte energie 14%.

9 Bij windsnelheid w is de opgewekte energie $E = c \cdot w^3$.
Als windsnelheid v twee keer zoveel energie opwekt, moet gelden:
$c \cdot v^3 = 2 \cdot c \cdot w^3 \Leftrightarrow v^3 = 2 \cdot w^3 \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{2 \cdot w^3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{w^3} = \sqrt[3]{2} \cdot w$
dus de windsnelheid moet met factor $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599...$ toenemen.
Dat is met ongeveer 26%.

Snelheid

10 Gegeven is de formule $s = \frac{t}{1+\sqrt{t}}$.
Een benadering voor de snelheid op $t = 4$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(4{,}01) - s(4)}{4{,}01 - 4} =$
$\frac{\frac{4{,}01}{1+\sqrt{4{,}01}} - \frac{4}{1+\sqrt{4}}}{0{,}01} = 0{,}2221...$ dus afgerond 0,22 m/s.

Toiletpapier

11 Het volume is gehalveerd als er nog 160π cm^3 over is.
$\frac{5}{2}\pi d^2 - 40\pi = 160\pi \Leftrightarrow \frac{5}{2}\pi d^2 = 200\pi \Leftrightarrow d^2 = 80 \Rightarrow d = \sqrt{80} = 8{,}94...$ cm
Als nog de helft op de rol zit is de diameter ongeveer 8,9 cm (of 89 mm).

12 Het aantal velletjes n dat op de rol zit, is evenredig met het volume V, dus het verband tussen n en V heeft de vorm $n = c \cdot V$, waarin c de evenredigheidsconstante is.
Voor een volle rol geldt $n = 500$ en $V = 320\pi \Rightarrow 500 = c \cdot 320\pi \Leftrightarrow c = \frac{500}{320\pi} = \frac{25}{16\pi}$.
Deze constante en de gegeven formule voor V substitueren in $n = c \cdot V$ geeft:
$n = \frac{25}{16\pi} \cdot \left(\frac{5}{2}\pi d^2 - 40\pi\right) = \frac{125\pi d^2}{32\pi} - \frac{1000\pi}{16\pi} = \frac{125 d^2}{32} - \frac{2000}{32} \Leftrightarrow n = \frac{125 d^2 - 2000}{32}$

Wortelfunctie

13 Eerst de functie herschrijven: $f(x) = \sqrt{4x-12} = \sqrt{4(x-3)}$
De grafiek van f kan ontstaan uit de grafiek van $g(x) = \sqrt{x}$ door de volgende transformaties:
- eerst vermenigvuldigen ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{4}$
- daarna verschuiven over 3 eenheden naar rechts

andere manier
Door $f(x)$ verder te herschrijven kan een andere oplossing worden gevonden.

$f(x) = \sqrt{4x-12} = \sqrt{4(x-3)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-3}$
Nu kan de grafiek van f ontstaan uit de grafiek van $g(x) = \sqrt{x}$ door de volgende transformaties:
- eerst verschuiven over 3 eenheden naar rechts
- daarna vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met factor 2

Bij deze tweede oplossing mag de volgorde van de transformaties verwisseld worden. Bij de eerste oplossing mag dit niet.

Punt op hyperbool

14 *opp driehoek* $= \frac{1}{2} \cdot$ *basis* $\cdot$ *hoogte.*

A heeft coördinaten $(a, 0)$ dus $OA = a$.

$f(a) = \frac{2}{a-2} + 4$ dus $AP = \frac{2}{a-2} + 4$

opp $\Delta OAP = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{2}{a-2} + 4\right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a-2} + 2a = \frac{a}{a-2} + \frac{2a}{1} =$

$\frac{a}{a-2} + \frac{2a(a-2)}{a-2} = \frac{a+2a(a-2)}{a-2} = \frac{a+2a^2-4a}{a-2} = \frac{2a^2-3a}{a-2}$ en dat is de gezochte formule.

Derdegraadsfunctie

15 $f(0) = 44$ dus punt Q is $(0, 44)$ en de lijn k heeft als vergelijking: $y = 44$.
Snijpunten van f en k berekenen:
$-x^3 + 27x + 44 = 44 \Leftrightarrow$
$-x^3 + 27x = 0 \Leftrightarrow$
$-x(x^2 - 27) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0$ of $x^2 = 27 \Leftrightarrow$
$x = 0$ of $x = \sqrt{27}$ of $x = -\sqrt{27}$
Hieruit volgt: $PR = 2\sqrt{27} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Wortel en lijn

16 Eerst het domein van f bepalen:
$-2x + 12 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -12 \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow$
Het domein van de functie f is $\langle \leftarrow, 6]$.
Het snijpunt van de grafieken volgt uit: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$
$\sqrt{-2x+12} = 2x$ eerst kwadrateren.

$\left(\sqrt{-2x+12}\right)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow -2x + 12 = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ of $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$ of $x = -2$

De vergelijking $2x^2 + x - 6 = 0$ *kan uiteraard ook met de abc-formule worden opgelost.*

De oplossing $x = -2$ voldoet niet want $\sqrt{-2 \cdot -2 + 12} \neq 2 \cdot -2$.

De oplossing $x = 1\frac{1}{2}$ voldoet want $\sqrt{-2 \cdot 1\frac{1}{2} + 12} = 3 = 2 \cdot 1\frac{1}{2}$ dus f snijdt g bij $x = 1\frac{1}{2}$.

Aflezen met behulp van de figuur: $f(x) \leq g(x)$ als $1\frac{1}{2} \leq x \leq 6$

17 De grafiek van h snijdt de grafiek van g in het punt met x-coördinaat 1 en omdat $g(1) = 2$ zal h door het punt $(1, 2)$ gaan.
f wordt horizontaal verschoven dus nu een punt op f zoeken dat op dezelfde hoogte als $(1, 2)$ ligt.
$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{-2x+12} = 2 \Rightarrow -2x + 12 = 4 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$
Het punt $(4, 2)$ van f wordt verschoven naar het punt $(1, 2)$ dat op g en h ligt $\Rightarrow$
h ontstaat uit f door een verschuiving 3 naar links $\Rightarrow$

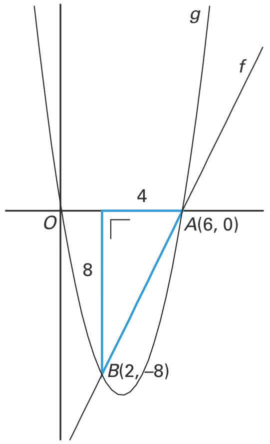
$h(x) = f(x+3) = \sqrt{-2(x+3)+12} \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{-2x+6}$

Lijn en parabool

18 De grafieken f en g snijden elkaar als geldt $f(x) = g(x)$:

$2x - 12 = x^2 - 6x \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 2$ of $x = 6$
$x = 2$ geeft $y = f(2) = 2 \cdot 2 - 12 = -8 \Rightarrow$
de coördinaten van B zijn $(2, -8)$.
$x = 6$ geeft $y = f(6) = 2 \cdot 6 - 12 = 0 \Rightarrow$
de coördinaten van A zijn $(6, 0)$.
Met de stelling van Pythagoras kan nu de exacte lengte van AB berekend worden:
$AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$



19 De gevraagde raaklijn moet evenwijdig zijn aan de grafiek van $f(x) = 2x - 12$, dus de raaklijn heeft helling 2. Nu moet het punt op de grafiek van g gevonden waar de helling 2 is. Daarvoor moeten we g' gelijk stellen aan 2.
$g(x) = x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = 2x - 6$ dus $g'(x) = 2 \Leftrightarrow 2x - 6 = 2 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$
$x = 4$ geeft $y = g(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 = -8 \Rightarrow$ het raakpunt is $(4, -8)$
De raaklijn $y = 2x + b$ gaat door het raakpunt $(4, -8) \Rightarrow -8 = 2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -16$.
Een raaklijnvergelijking is dus $y = 2x - 16$.

Twee lijnen en een driehoek

20 f is de lijn door A en C; $f(0) = 2 \Rightarrow$ punt A is $(0, 2)$
g is de lijn door B en C; $g(0) = 8 \Rightarrow$ punt B is $(0, 8)$

Nu het snijpunt van f en g bepalen: $\frac{1}{2}x + 2 = 8 - x \Leftrightarrow 1\frac{1}{2}x = 6 \Leftrightarrow x = 4$

Omdat $f(4) = g(4) = 4$ is punt $C(4, 4)$. Dus de afstand van C tot de y-as is 4.
Neem AB als basis van de driehoek en de afstand van C tot de y-as als hoogte.

Dan geldt: opp $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

21 l is evenwijdig aan de y-as. Stel dat l de x-as snijdt voor $x = p$ dan zijn de coördinaten van S en T als volgt: $S(p, \frac{1}{2}p + 2)$ en $T(p, 8 - p)$

Uit $ST = 18$ volgt: $y_S - y_T = 18$ of $y_T - y_S = 18 \Leftrightarrow$

$(\frac{1}{2}p + 2) - (8 - p) = 18$ of $(8 - p) - (\frac{1}{2}p + 2) = 18 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}p + 2 - 8 + p = 18$ of $8 - p - \frac{1}{2}p - 2 = 18 \Leftrightarrow$

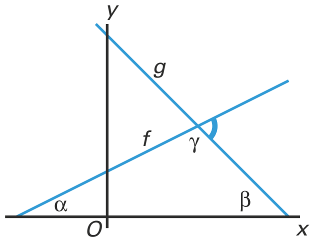
$1\frac{1}{2}p = 24$ of $-1\frac{1}{2}p = 12 \Leftrightarrow$

$p = 16$ of $p = -8$

Als $p = 16$ zijn de coördinaten $S(16, 10)$ en $T(16, -8)$.

Als $p = -8$ zijn de coördinaten $S(-8, -2)$ en $T(-8, 16)$.

22 *Rekenmachine instellen op graden.*



De grafiek van f heeft helling $\frac{1}{2}$ dus $\tan(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26{,}56...^\circ$

De grafiek van g heeft helling -1 dus $\beta = 45^\circ$.

$\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 26{,}56...^\circ = 108{,}43...^\circ$

De scherpe hoek tussen de grafieken van f en g is ongeveer 72°.

Functies met een wortel

23 Het punt (27, 108) ligt op de grafiek van $f_a(x) = x\sqrt{x + a} \Rightarrow$

$f_a(27) = 108 \Leftrightarrow 108 = 27\sqrt{27 + a} \Leftrightarrow \sqrt{27 + a} = \frac{108}{27} = 4 \Rightarrow 27 + a = 16 \Leftrightarrow a = -11$

24 Voor de snijpunten O en P geldt: $x\sqrt{x + 18} = 2x \Leftrightarrow x = 0$ of $\sqrt{x + 18} = 2 \Rightarrow$

$x = 0$ of $x + 18 = 4 \Rightarrow x = 0$ of $x = -14$

De oplossing $x = 0$ geeft snijpunt $O(0, 0)$.

De y-coördinaat van P is $f_{18}(-14) = -14 \cdot \sqrt{-14 + 18} = -14 \cdot 2 = -28$ dus $P(-14, -28)$.

De exacte lengte van OP is: $\sqrt{14^2 + 28^2} = \sqrt{980}$

andere manier

$x\sqrt{x + 18} = 2x$ oplossen door kwadrateren geeft:

$(x\sqrt{x + 18})^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow x^2(x + 18) = 4x^2 \Leftrightarrow x^3 + 18x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow x^3 + 14x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x + 14) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 14$. Verder als hierboven.

25 $f_{18}(x) = x\sqrt{x + 18}$ wordt 18 naar rechts geschoven. Vervang elke x door $x - 18$.

Zo ontstaat $f_{18}(x - 18) = (x - 18)\sqrt{(x - 18) + 18} = (x - 18)\sqrt{x} = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} = g(x)$.

© ThiemeMeulenhoff

Overlevingstijd

26 $T = 20 \Rightarrow R(20) = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034 \cdot 20} = 700{,}714...$ minuten.

$T = 10 \Rightarrow R(10) = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034 \cdot 10} = 176{,}797...$ minuten.

$\frac{R(20)}{R(10)} = \frac{700{,}714...}{176{,}797...} = 3{,}96...$ dus de overlevingstijd bij een watertemperatuur van 20 °C is ongeveer vier keer zo groot als bij 10 °C.

27 Als de overlevingstijd 5,0 uur is, geldt: $R = 5{,}0 \cdot 60 = 300$ minuten.

$R = 300 \Rightarrow 300 = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T} \Leftrightarrow 285 = \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T} \Leftrightarrow$

$0{,}0785 - 0{,}0034T = \frac{7{,}2}{285} \Leftrightarrow 0{,}0785 - 0{,}0034T = 0{,}0252... \Leftrightarrow$

$-0{,}0034T = 0{,}0252... - 0{,}0785 \Leftrightarrow$

$-0{,}0034T = -0{,}0532... \Leftrightarrow T = \frac{-0{,}0532...}{-0{,}0034} \approx 15{,}7$

Afgerond op een geheel aantal graden: $T = 16$ °C

28 Er is een asymptoot als de noemer van de breuk nul is, dus als $0{,}0785 - 0{,}0034T = 0 \Leftrightarrow$

$-0{,}0034T = -0{,}0785 \Leftrightarrow T = \frac{-0{,}0785}{-0{,}0034} \approx 23$ °C

Bij een watertemperatuur van 23 °C kan een persoon volgens deze formule onbeperkt lang in het water blijven zonder dat de lichaamstemperatuur daalt tot 30 °C.

29 $R = 15 + \frac{7{,}2}{0{,}0785 - 0{,}0034T} = 15 + 7{,}2 \cdot (0{,}0785 - 0{,}0034T)^{-1}$

Kettingregel: $R' = 7{,}2 \cdot -1 \cdot (0{,}0785 - 0{,}0034T)^{-2} \cdot -0{,}0034 = \frac{0{,}02448}{(0{,}0785 - 0{,}0034T)^2}$

De teller van R' is een positieve constante. De noemer is een kwadraat, dus ook altijd positief $\Rightarrow$ R' is altijd positief dus R stijgt altijd.

Geluidssnelheid in de atmosfeer

30 $T = -27{,}4$ °C $\Rightarrow V = 331\sqrt{1 + \frac{-27{,}4}{273}} \approx 314{,}0$ m/s

$T = 38{,}6$ °C $\Rightarrow V = 331\sqrt{1 + \frac{38{,}6}{273}} \approx 353{,}6$ m/s

Het verschil van de geluidssnelheden is 39,6 m/s.

31 Gegeven is $T = 15 - 6{,}5h$, dus in de formule $V = 331\sqrt{1 + \frac{T}{273}}$ kan T worden vervangen door $15 - 6{,}5h \Rightarrow V = 331\sqrt{1 + \frac{15 - 6{,}5h}{273}} \Rightarrow V = 331\sqrt{1 + \frac{15}{273} - \frac{6{,}5h}{273}} \Rightarrow$

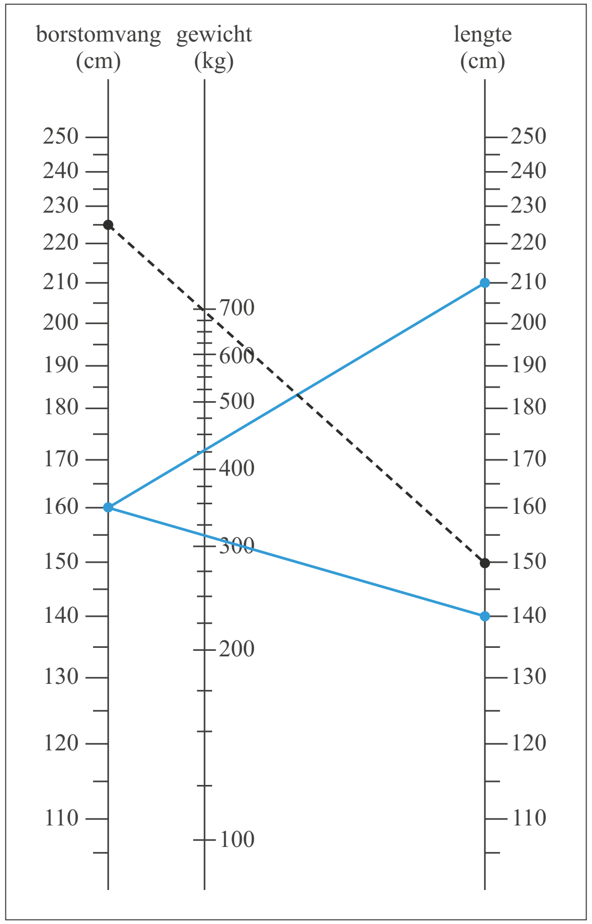
$V \approx 331\sqrt{1 + 0{,}0549 - \frac{6{,}5}{273}h} \Rightarrow V \approx 331\sqrt{1{,}0549 - 0{,}0238h}$

© ThiemeMeulenhoff

32 De Boeing 747 wil vliegen met een snelheid van 975 km per uur, ofwel 270,83... m/s.
Deze snelheid mag niet meer dan 90% van de geluidssnelheid V zijn, met andere woorden $270{,}8... \leq 0{,}9V$.
Op de gezochte hoogte geldt: $0{,}9V = 270{,}8... \Leftrightarrow V = 300{,}92...$ m/s
Nu moet de vergelijking $300{,}92... = 331\sqrt{1{,}0549 - 0{,}0238h}$ worden opgelost.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 300{,}92...$ en $y_2 = 331\sqrt{1{,}0549 - 0{,}0238x}$.
Met behulp van *intersect* volgt $x \approx 9{,}59...$ dus het vliegtuig kan tot op 9,6 km hoogte vliegen.

Het gewicht van een paard

33 Neem twee paarden met een borstomvang van bijvoorbeeld 160 cm. Het kleinste paard heeft een lengte van bijvoorbeeld 140 cm, het grootste paard heeft een 1,5 keer zo grote lengte, dus 210 cm.



Lees af in het nomogram bij de blauwe lijnen: het kleinste paard weegt ongeveer 312 kg, het grootste paard weegt ongeveer 425 kg.
Anderhalf keer 312 is 468, dus het gewicht van het grootste paard is niet anderhalf keer zo groot als dat van het kleinste paard.

© ThiemeMeulenhoff

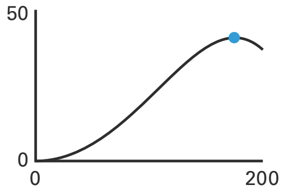
34 Voor dit paard geldt de verhouding $B : L = 3 : 2 = 1{,}5 : 1$ dus $B = 1{,}5L = 1{,}5 \cdot 150 = 225$ cm.
De formule van Carroll geeft: $G_C = \frac{225^2 \cdot 150}{11\,900} \approx 638$ kg

De formule van Jones geeft: $G_J = \frac{225^{1{,}78} \cdot 150^{0{,}97}}{3000} \approx 662$ kg

Het nomogram (zie stippellijn) geeft een gewicht van iets minder dan 700 kg.
Het gewicht volgens het nomogram komt het best overeen met het gewicht volgens de formule van Jones.

35 Voor de Arabische volbloed geldt $B = L$ dus:
$$V = G_J - G_C = \frac{B^{1{,}78} \cdot L^{0{,}97}}{3000} - \frac{B^2 \cdot L}{11\,900} = \frac{L^{1{,}78} \cdot L^{0{,}97}}{3000} - \frac{L^2 \cdot L^1}{11\,900} = \frac{L^{2{,}75}}{3000} - \frac{L^3}{11\,900}$$

Voer in de rekenmachine in $y_1 = \frac{x^{2{,}75}}{3000} - \frac{x^3}{11\,900}$ en bepaal met de optie *maximum* voor welke waarde van x het maximum wordt bereikt.



Dit geeft $x = 174{,}802...$ dus voor $L \approx 175$ cm is het verschil V maximaal.
andere manier
De waarde van L waarvoor $V = \frac{L^{2{,}75}}{3000} - \frac{L^3}{11\,900}$ een maximum bereikt kan ook met behulp van differentiëren worden gevonden.

$$V = \frac{L^{2{,}75}}{3000} - \frac{L^3}{11\,900} = \frac{1}{3000}L^{2{,}75} - \frac{1}{11\,900}L^3 \Rightarrow V' = \frac{2{,}75}{3000}L^{1{,}75} - \frac{3}{11\,900}L^2$$

Er is een maximum als $V' = 0 \Leftrightarrow \frac{2{,}75}{3000}L^{1{,}75} - \frac{3}{11\,900}L^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$L^{1{,}75}\left(\frac{2{,}75}{3000} - \frac{3}{11\,900}L^{0{,}25}\right) = 0 \Leftrightarrow L = 0 \text{ of } \frac{2{,}75}{3000} - \frac{3}{11\,900}L^{0{,}25} = 0$$

Voor $L = 0$ is er geen paard, dus nu oplossen $\frac{2{,}75}{3000} - \frac{3}{11\,900}L^{0{,}25} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{3}{11\,900}L^{0{,}25} = \frac{2{,}75}{3000} \Leftrightarrow L^{0{,}25} = \frac{\left(\frac{2{,}75}{3000}\right)}{\left(\frac{3}{11\,900}\right)} = 3{,}636... \Rightarrow L = (3{,}636...)^4 = 174{,}802...$$

dus V is maximaal als $L \approx 175$ cm .

© ThiemeMeulenhoff

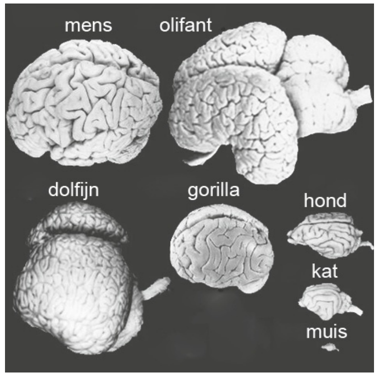
3 Exponentiële en logaritmische functies

Hersengewicht

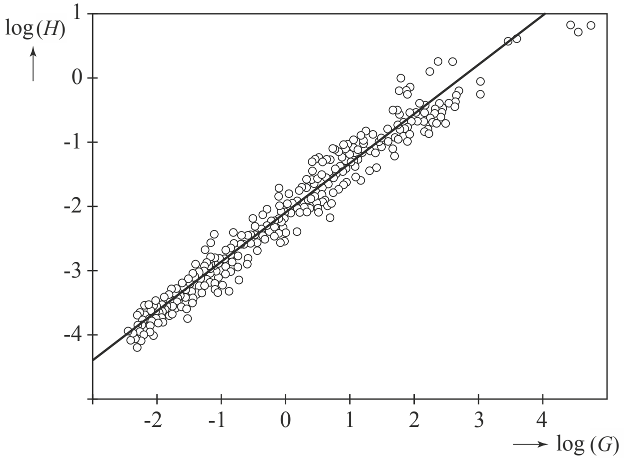
Niet alle dieren hebben even zware hersenen. Zwaardere dieren hebben meestal zwaardere hersenen.

Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen dieren van een soort in kg, noemen we *G*. Het gemiddelde hersengewicht van volwassen dieren van die soort in kg, noemen we *H*. De grafiek in de figuur hieronder geeft het verband weer tussen de logaritme van *G* en de logaritme van *H*.
In deze figuur zijn meetpunten te zien die horen bij 477 soorten zoogdieren. De meetpunten liggen min of meer op een rechte lijn. Deze rechte lijn is ook in figuur 2 hieronder getekend.

figuur 1



figuur 2



Het gemiddelde lichaamsgewicht van volwassen katten is 5 kg.

1 Bepaal met behulp van de rechte lijn in figuur 2 het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten.

Een formule die bij de rechte lijn hoort is $\log(H) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097$.

Er zijn diersoorten waarvan de volwassen dieren een gemiddeld hersengewicht hebben dat 1% is van hun gemiddelde lichaamsgewicht.

2 Bereken met behulp van de gegeven formule dit gemiddelde lichaamsgewicht.

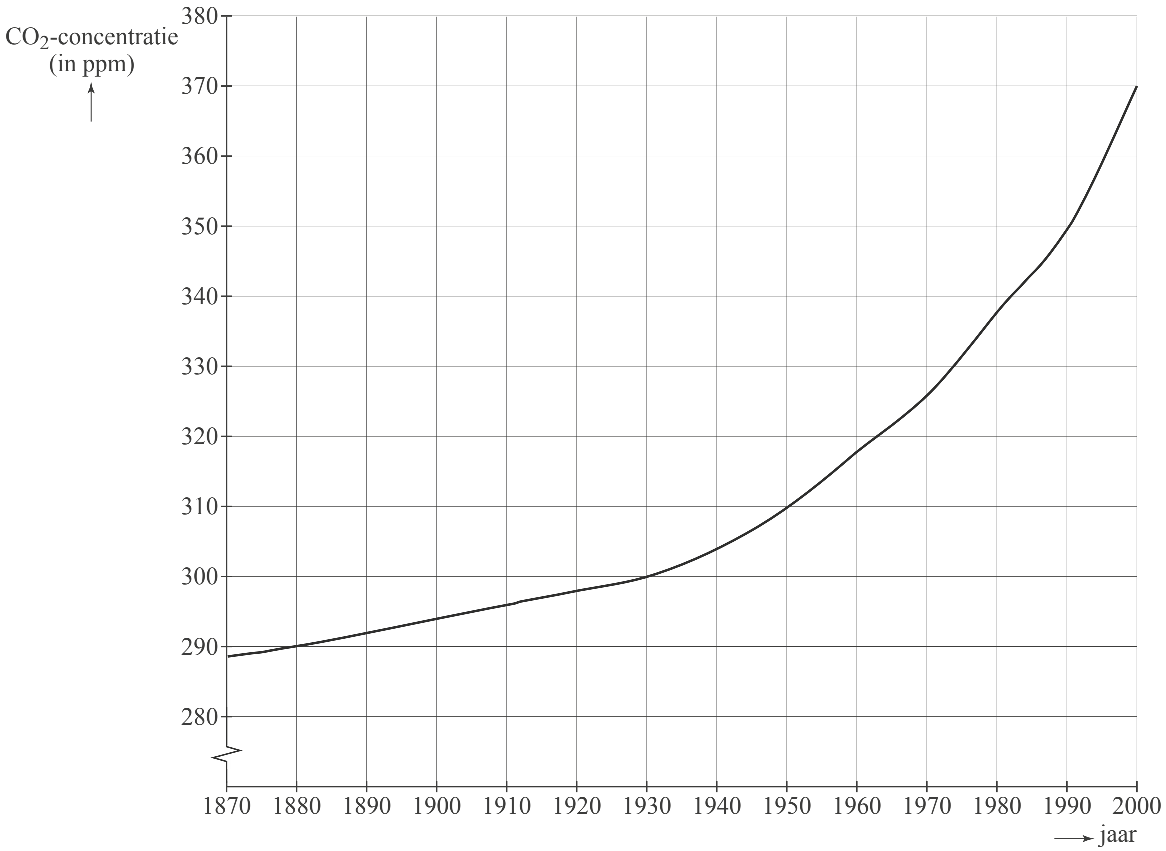
De bovenstaande formule is ook te schrijven als $H = a \cdot G^b$

3 Bereken de waarden van *a* en *b*. Geef je antwoorden in drie decimalen nauwkeurig.

© ThiemeMeulenhoff

CO_2

Sinds 1870 meet men de CO_2-concentratie in de atmosfeer. De CO_2-concentratie wordt uitgedrukt in parts per million (ppm). Dit is het aantal CO_2-deeltjes per miljoen deeltjes. In de figuur kun je zien hoe de CO_2-concentratie in de atmosfeer is veranderd in de periode 1870-2000.



In het jaar 1900 veronderstelde de latere Nobelprijswinnaar Arrhenius dat de lineaire groei van de CO_2-concentratie zoals die toen al sinds 1880 optrad, zich op dezelfde manier zou voortzetten. Hij voorspelde hiermee hoeveel de CO_2-concentratie tussen 1900 en 2000 zou toenemen. De toename zoals die door Arrhenius is voorspeld, is veel kleiner dan de werkelijke toename tussen 1900 en 2000.

4 Bepaal met behulp van de figuur hoeveel ppm de door Arrhenius voorspelde toename te klein uitviel.

© ThiemeMeulenhoff

Na 1930 steeg de CO_2-concentratie sneller dan Arrhenius in 1900 had aangenomen. Een model dat beter past bij de gegevens van 1930 tot 2000 gaat uit van een **natuurlijk niveau** in de CO_2-concentratie met daar bovenop een bijdrage van de mens aan de CO_2-concentratie, de zogeheten **menselijke component**. Wetenschappers hebben kunnen vaststellen dat het natuurlijke niveau al eeuwen rond de 285 ppm schommelt. Voor de menselijke component vanaf 1930 wordt in het model uitgegaan van exponentiële groei.

In 1930 bedroeg de CO_2-concentratie 300 ppm. Hiervan was 285 ppm het natuurlijke niveau en 15 ppm de menselijke component. In 2000 was de CO_2-concentratie gestegen tot 370 ppm. Met behulp van deze gegevens kun je berekenen met hoeveel procent de menselijke component elke 10 jaar volgens het model toeneemt.

5 Bereken deze procentuele toename per 10 jaar. Rond je antwoord af op een geheel aantal procenten.

Een formule die de CO_2-concentratie vanaf 1 juli 1930 goed benadert, is

$C = 15 \cdot 1{,}025^t + 285$

Hierin is C de CO_2-concentratie in ppm en t is de tijd in jaren na 1 juli 1930.

6 Bereken met behulp van deze formule in welk jaar de menselijke component even groot zal zijn als het natuurlijke niveau.

Medicijnen voorschrijven

Er worden steeds meer medicijnen verkocht. Als een medicijn goed lijkt te werken, stijgt de verkoop extra snel. Zo'n medicijn is Rustical, dat kalmerend werkt.

Het aantal personen dat per jaar Rustical kreeg voorgeschreven, wordt sinds 1991 bij benadering gegeven door $A(t) = 3900 \cdot 1{,}3^t$. Hierin is t het aantal jaren vanaf 1991 en $A(t)$ het aantal personen per jaar.

7 Onderzoek in hoeveel tijd volgens dit model het aantal personen dat per jaar Rustical krijgt voorgeschreven tien keer zo groot wordt. Rond je antwoord af op een geheel aantal jaren.

Het aantal *recepten* Rustical dat werd voorgeschreven, is vanaf 1991 ook bij benadering exponentieel gestegen. In 1996 bedroeg het aantal voorgeschreven recepten voor Rustical 42000, in 1999 was dit aantal 157000.

8 Toon door een berekening aan dat het jaarlijkse groeipercentage voor het aantal recepten ongeveer gelijk is aan 55%.

9 Bereken met hoeveel procent het gemiddeld aantal recepten per patiënt is toegenomen in de periode 1996 – 1999. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Luchtdruk en hoogte

In de luchtvaart spelen hoogte en luchtdruk een belangrijke rol. De luchtdruk kan worden gemeten met een luchtdrukmeter. Uit de waarde van de gemeten luchtdruk kan de hoogte van het vliegtuig worden afgeleid. Luchtdruk wordt gemeten in millibar (mbar) en hoogte in feet (meervoud van foot, 1 foot ≈ 30 cm). Hoe hoger je vliegt, hoe lager de luchtdruk is.

Voor het verband tussen de hoogte en de luchtdruk wordt gebruik gemaakt van de volgende vuistregels:

- Op zeeniveau (hoogte 0 foot) is de luchtdruk 1013 millibar;
- Tot een hoogte van 12 000 feet neemt de luchtdruk af met 1 millibar per 30 feet stijging.

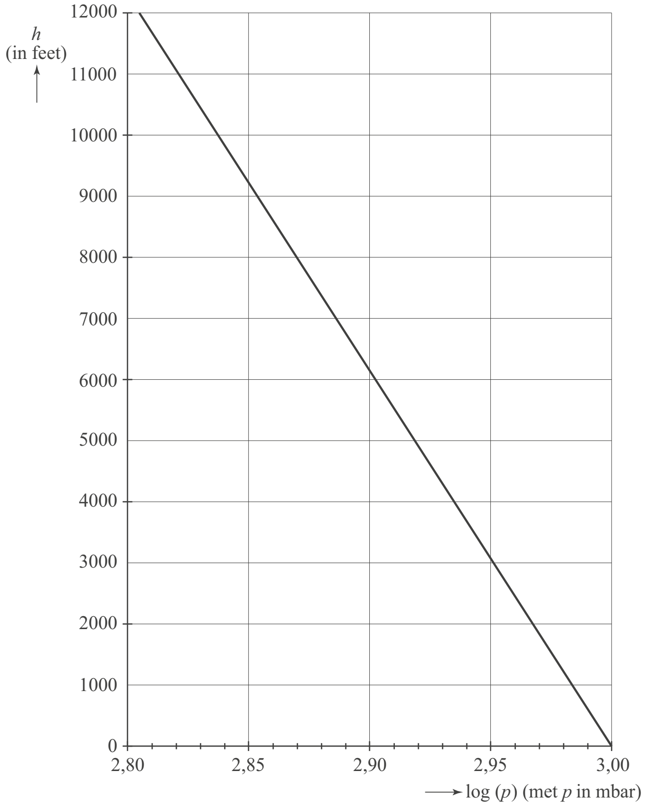
Uit deze vuistregels is voor hoogten tot 12 000 feet de volgende lineaire formule af te leiden:

$h = 30\,390 - 30p$

Hierin is h de hoogte in feet en p de luchtdruk in millibar.

10 Toon aan dat de formule volgt uit de vuistregels.

Een andere manier om het verband tussen de luchtdruk *p* en de hoogte *h* te beschrijven, gaat uit van een logaritmisch verband. In de figuur is het verband tussen log(*p*) en *h* weergegeven.



In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 843 millibar gemeten. In de figuur kan nu de hoogte worden afgelezen.

11 Lees deze hoogte af en bereken hoeveel deze verschilt van de hoogte die berekend kan worden met behulp van de formule $h = 30\,390 - 30p$.

Het logaritmische verband dat in de figuur is weergegeven, kan beschreven worden met de formule $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p))$.
Hierin is *h* weer de hoogte in feet en *p* de luchtdruk in millibar.

Bij een bepaalde luchtdruk leveren de formules $h = 30\,390 - 30p$ en $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p))$ dezelfde hoogte op.

12 Bereken bij welke luchtdruk dit het geval is. Geef je antwoord in een geheel aantal millibar.

Een vliegtuig stijgt van 0 foot naar 1000 feet.

13 Bereken het percentage waarmee de luchtdruk tijdens deze stijging volgens de formule $h = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p))$ afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

© ThiemeMeulenhoff

Diergemeenschappen in Afrika

Er is veel onderzoek gedaan naar de samenstelling van grazende diergemeenschappen in de natuurparken van Afrika. Dergelijke grazende diergemeenschappen worden **gilden** genoemd.
Onderzoek heeft zich onder andere gericht op de gewichten van de diersoorten binnen een gilde. Bij dit onderzoek heeft men de soorten binnen een gilde op volgorde gezet van gemiddeld lichaamsgewicht. De lichtste soort heeft men rangnummer 0 gegeven. De lichtste soort noemen we daarom soort 0, de op een na lichtste soort noemen we soort 1, enzovoort. Je kunt nu de gewichten van elkaar opvolgende soorten vergelijken.
Dit vergelijken gebeurt via de zogeheten **gewichtsratio**. Dat is de verhouding tussen het (gemiddelde) gewicht van volwassen dieren van twee elkaar opvolgende soorten. Als bijvoorbeeld soort 7 een gewicht heeft dat 1,8 keer zo groot is als dat van soort 6, dan is de gewichtsratio tussen deze twee soorten gelijk aan 1,8. Uit dergelijk onderzoek is nu gebleken:

Binnen elk gilde is de gewichtsratio tussen twee elkaar opvolgende diersoorten vrijwel constant.

Dit betekent dat in het gilde van het voorbeeld hierboven geldt: soort 1 is 1,8 keer zo zwaar als soort 0, soort 2 is 1,8 keer zo zwaar als soort 1, enzovoort.

Neem aan dat in een ander gilde de gewichtsratio gelijk is aan 1,35 en dat soort 3 een gewicht heeft van 7,8 kg.

14 Bereken het gewicht van de lichtste soort in dit gilde.

Niet alleen binnen een bepaald natuurgebied is er sprake is van een vrijwel constante gewichtsratio, maar dit geldt ook als men alle grazende diersoorten in geheel Afrika als één diergemeenschap beschouwt. Omdat er in totaal dan meer diersoorten zijn, zal de gewichtsratio voor heel Afrika kleiner zijn dan die voor de afzonderlijke gilden.
In de tabel staan de gewichten van drie diersoorten met daarbij hun rangnummer in de gewichtsvolgorde van soorten in heel Afrika.
Bij de volgende vragen wordt ervan uitgegaan dat de gewichtsratio tussen alle elkaar opvolgende soorten constant is.

soort	rangnummer in gewichtsvolgorde	gewicht (kg)
hartebeest	71	164
steppezebra	81	286
Kaapse buffel	92	631

15 Bereken de gewichtsratio voor heel Afrika met behulp van de gegevens in de tabel voor hartebeest en Kaapse buffel in twee decimalen nauwkeurig.

Voor diersoorten zwaarder dan de Kaapse buffel blijkt de gewichtsratio niet meer constant te zijn. Onderzoekers denken dat dit komt doordat lang geleden veel zware soorten zijn uitgestorven. De zwaarste grazersoort is momenteel de olifant met rangnummer 95 en een gewicht van 3550 kg.

Neem aan dat vroeger de gewichtsratio in Afrika voor alle elkaar opvolgende soorten constant gelijk aan 1,06 is geweest.

16 Onderzoek hoeveel soorten in de rangschikking tussen de Kaapse buffel en de olifant sindsdien zijn uitgestorven.

© ThiemeMeulenhoff

Voor dieren in een natuurpark in Oost-Afrika, het Serengetipark, geldt het volgende verband: $\log(W) = 0{,}075N + 0{,}4$
Hierin is W het lichaamsgewicht van een soort in kg en N is het rangnummer van die soort.
Deze formule kan met behulp van algebra worden omgewerkt tot $W = b \cdot g^N$.

17 Bereken op deze wijze de waarden van b en g. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Diersoorten

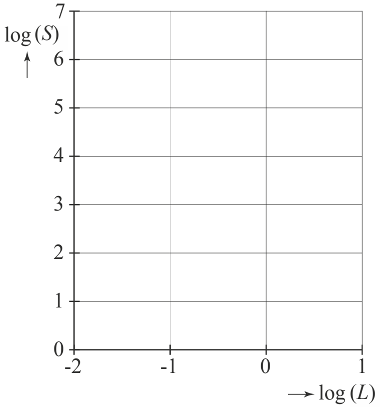
Uit onderzoek is gebleken dat er een verband bestaat tussen de lengte van diersoorten en het aantal diersoorten met die lengte. Met de lengte van een diersoort wordt bedoeld de gemiddelde lengte van volwassen dieren van die soort. Het blijkt dat er weinig lange diersoorten zijn en veel korte diersoorten. Uit gegevens die de onderzoeker Dobson verzamelde, blijkt dat bij benadering de volgende formule geldt:

$$S = \frac{700}{L^2}$$

Hierin is L de lengte in meter en S het aantal diersoorten met die lengte.
Deze formule geldt voor $0{,}01 \le L \le 10$.
Het aantal diersoorten van 10 cm lang is veel groter dan het aantal diersoorten van 50 cm lang.

18 Bereken met behulp van de bovenstaande formule hoeveel maal zo groot.

De grafiek van S als functie van L is op het scherm van een grafische rekenmachine lastig in beeld te brengen vanwege de enorme verschillen in S-waarden.
Het is wél mogelijk om de grafiek van $\log(S)$ als functie van $\log(L)$ goed in beeld te krijgen.
Als een assenstelsel wordt gebruikt waarin $\log(S)$ is uitgezet tegen $\log(L)$, wordt de grafiek een rechte lijn. In de figuur hiernaast is een dergelijk assenstelsel getekend.



Met behulp van de bovenstaande formule kan voor een aantal waarden van L de bijbehorende waarde van S worden berekend. Daarna kunnen $\log(L)$ en $\log(S)$ worden berekend en kan het bijbehorende punt in het assenstelsel worden getekend.

19 Teken in de figuur de grafiek van $\log(S)$ als functie van $\log(L)$.
Geef een toelichting.

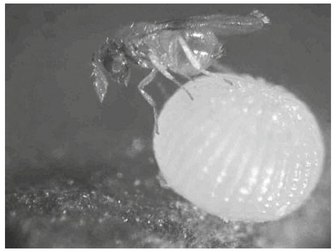
© ThiemeMeulenhoff

De formule $S = \frac{700}{L^2}$ is met behulp van algebra om te werken tot de vorm
$\log(S) = p + q \cdot \log(L)$

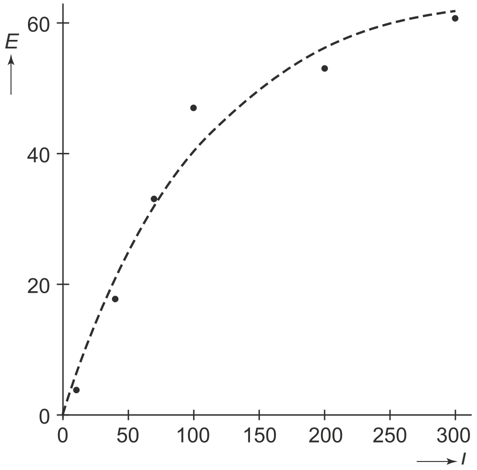
20 Bereken op deze manier de waarden van p en q.

Sluipwespen

Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden.



Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet.
Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren.
Dit aantal noemen we L. Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten.
Dit aantal wordt E genoemd. Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten (stippen) zijn te zien in de figuur.



Het verband tussen E en L kan redelijk worden benaderd door de formule
$E = 64 \cdot (1 - 0{,}6^{0{,}02L})$

In de figuur is de grafiek van E gestippeld. Uit de figuur valt af te lezen dat bij $L = 100$ het aantal larven met eitjes volgens de formule nogal afwijkt van het gemeten aantal larven met eitjes.

21 Bereken bij $L = 100$ het verschil tussen het aantal larven met eitjes volgens de formule, afgerond op een geheel aantal larven, en het gemeten aantal larven met eitjes.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

22 Beredeneer hoe groot deze grenswaarde is, door in de formule het aantal larven L te laten toenemen tot zeer grote waarden.

© ThiemeMeulenhoff

Mosselen

Driehoeksmosselen (zie de foto) kunnen een bijdrage leveren aan de vermindering van de hoeveelheid algen in het water. Zij 'filteren' het water.
De hoeveelheid gefilterd water in ml/uur noemen we de **filtercapaciteit** van een mossel. Er bestaat een verband tussen de filtercapaciteit van een driehoeksmossel en zijn schelplengte. Hiervoor geldt bij benadering de volgende formule:

$$C = \frac{52{,}7}{1 + 179 \cdot 0{,}693^{L}}$$

Hierin is C de filtercapaciteit in ml/uur en L is de schelplengte in mm.

Er wordt beweerd dat een driehoeksmossel van 29 mm lang per dag (24 uur) meer dan 1 liter water kan filteren.

23 Onderzoek of deze bewering overeenstemt met de gegeven formule.

In de praktijk blijkt dat de filtercapaciteit van een driehoeksmossel van 29 mm nauwelijks toeneemt als deze driehoeksmossel verder groeit. Dit is in overeenstemming met de formule.

24 Leg uit hoe uit de formule volgt dat de grafiek die bij deze formule hoort een horizontale asymptoot heeft.

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (in mm) en het gewicht van het vlees W (in grammen) van mosselen.
Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2006 zijn in de tabel weergegeven.
Bij verschillende lengten zijn de gemiddelde vleesgewichten vermeld.

vleesgewicht mosselen in 2006

L (in mm)	30	40	50	60	70
W (in grammen)	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

We nemen aan dat W evenredig is met een macht van L. Bij de tabel hoort dus een formule van de vorm $W = a \cdot L^{b}$. Hierin zijn a en b nog nader te bepalen constanten.

25 Bereken a en b.

In een publicatie over 2005 is het verband tussen W en L gegeven door de formule $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)$.
Net als in 2006 is W ook nu evenredig met een macht van L.

26 Werk de formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^{b}$.

 © ThiemeMeulenhoff

Het HABOG

Kernenergie levert weinig afval op, maar het is wel afval dat speciale aandacht vereist. Het is namelijk radioactief en het blijft nog tientallen jaren warmte afgeven.
In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waar de komende honderd jaar kernafval zal worden opgeslagen. Het gebouw heet HABOG, Hoogradioactief Afval Behandelings- en Opslag Gebouw. In het HABOG wordt het afval van de kerncentrale van Borssele opgeslagen.
Over honderd jaar zijn de radioactiviteit en de warmte van het afval zo veel afgenomen dat het afval op een andere plaats kan worden opgeslagen.

Het afval uit Borssele bestaat jaarlijks uit zes glasblokken met hoogradioactief afval. In het begin geeft zo'n blok evenveel warmte af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot die van drie gloeilampen, ofwel 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.

27 Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte per jaar afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht (zie foto). Elke tien jaar wordt het gebouw opnieuw geverfd, telkens in een iets lichtere tint om de afname van de warmteafgifte mee aan te geven.
Je mag er in de volgende vraag van uitgaan dat de warmteafgifte met 2,3% per jaar afneemt.

28 Bereken na hoeveel jaar de warmteafgifte nog maar de helft is van de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond je antwoord af op één decimaal.

De formule $W = 1800 \cdot 10^{-0{,}01t}$ beschrijft de warmteafgifte van zo'n blok, waarin W in Watt en t het aantal jaren vanaf het moment van opslaan.

29 Werk de formule om tot een formule waarin t wordt uitgedrukt in W.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 3

1 Bereken log(*G*) voor deze kat en lees daarbij in de grafiek log(*H*) af.

2 $H = 0{,}01G$. Gebruik een rekenregel voor logaritmen: $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$

3 Gebruik de rekenregel: ${}^g\log(a) = x \Leftrightarrow a = g^x$. Bedenk dat $10^{\log(x)} = x$.
Drie decimalen!

4 Lees de toename van de CO_2-concentratie voor de periode 1880 tot 1900 af en bereken met deze toename de CO_2-concentratie in het jaar 2000.

5 Bereken eerst de groeifactor van de menselijke component voor 70 jaar, daarna voor 10 jaar.

6 In de formule $C = 15 \cdot 1{,}025^t + 285$ is de term $15 \cdot 1{,}025^t$ de menselijke component.

7 Los op: $3900 \cdot 1{,}3^t = 39\,000$

8 Bereken de groeifactor per 3 jaar, en vervolgens die per jaar.

9 Het gemiddeld aantal recepten per persoon = aantal recepten / aantal personen.

10 Uit de gegevens volgt een formule van de vorm $p = a \cdot h + b$. Herleid deze tot de gezochte vorm.

11 Bereken log(*p*) en lees de hierbij behorende hoogte af in de figuur.

12 Formules aan elkaar gelijk stellen. Los de vergelijking op met de rekenmachine.

13 Bereken *p* bij $h = 0$ en $h = 1000$.

14 Groeifactor per stap is 1,35. Bereken de groeifactor voor drie stappen.

15 Bereken eerst de gewichtsratio over 21 stappen.

16 Hoeveel maal moet de factor 1,06 op 631 kg worden toegepast om 3550 kg te krijgen?

17 Het grondtal van log(*W*) is 10.
Gebruik verder de rekenregels voor machten: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

18 Reken de lengtes om naar meters en vul ze in in de gegeven formule.

19 Begin bijvoorbeeld met $\log(L) = -2$. Bereken hierbij *L*, vervolgens *S* en tenslotte log(*S*).
Nu ligt er een punt van de rechte lijn vast. Bepaal op dezelfde wijze nog een punt en teken de lijn.

20 Gebruik de volgende rekenregels voor logaritmen:
$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$ en $\log(a^k) = k \cdot \log(a)$

21 Gebruik een liniaal om in de figuur de waarde van *E* af te lezen bij $L = 100$.

22 Als $0 < g < 1$ dan nadert g^x naar 0 als *x* zeer groot wordt.

23 Vul $L = 29$ in. Gebruik verder dat 1000 ml = 1 liter.

24 De grafiek van de exponentiele functie $f(x) = 0{,}693^x$ daalt asymptotisch naar nul.
Bekijk de gevolgen hiervan op de rest van de noemer, en vervolgens op die van de hele breuk.

25 Kies tweemaal een paar getallen uit de tabel en vul deze in de formule in.
Zo krijg je twee vergelijkingen in *a* en *b*.

26 Het grondtal van log(*W*) is 10. Gebruik $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$
Gebruik verder de rekenregels voor machten: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$

© ThiemeMeulenhoff

27 Bereken de groeifactor van de warmteafgifte per 100 jaar en met behulp daarvan de groeifactor per jaar.

28 Oplossen $1800 \cdot g^t = 900$, waarin *g* de groeifactor per jaar is.

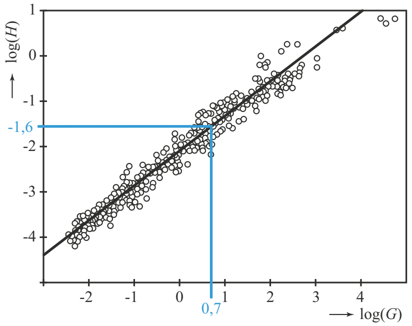
29 Gebruik $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 3

Hersengewicht

1 Voor een volwassen kat geldt $G = 5$ dus $\log(G) = \log(5) \approx 0{,}7$.



In figuur 2 kun je bij $\log(G) = 0{,}7$ aflezen dat $\log(H) \approx -1{,}6$ dus $H = 10^{-1{,}6} \approx 0{,}0251$ kg dus het gemiddelde hersengewicht van volwassen katten is ongeveer 25 gram.

2 Het gemiddelde hersengewicht van de diersoort is 1% van hun gemiddelde lichaamsgewicht dus $H = 0{,}01G$.
Vervang nu H in de formule van de rechte lijn door $0{,}01G$. Dit geeft:
$\log(0{,}01G) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097 \Leftrightarrow \log(0{,}01) + \log(G) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097 \Leftrightarrow$
$\log(G) - 0{,}767 \cdot \log(G) = -2{,}097 - \log(0{,}01) \Leftrightarrow (1 - 0{,}767) \cdot \log(G) = -2{,}097 - (-2) \Leftrightarrow$
$0{,}233 \cdot \log(G) = -0{,}097 \Leftrightarrow \log(G) = \frac{-0{,}097}{0{,}233} = -0{,}416...$
dus $G = 10^{-0{,}416...} \approx 0{,}383$
Het gemiddelde lichaamsgewicht van deze diersoort is ongeveer 0,383 kg (383 gram).

3 $\log(H) = 0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097 \Leftrightarrow H = 10^{0{,}767 \cdot \log(G) - 2{,}097} = 10^{0{,}767 \cdot \log(G)} \cdot 10^{-2{,}097} \Leftrightarrow$
$H = \left(10^{\log(G)}\right)^{0{,}767} \cdot 10^{-2{,}097} \Leftrightarrow H = G^{0{,}767} \cdot 10^{-2{,}097}$
dus afgerond op drie decimalen: $a = 10^{-2{,}097} \approx 0{,}008$ en $b = 0{,}767$

CO_2

4 Uit de figuur is af te lezen dat in 1880 de CO_2-concentratie 290 ppm was en in 1900 bedroeg die 294 ppm. In 20 jaar nam de CO_2-concentratie met 4 ppm toe.
In de periode 1900 tot 2000 nam volgens Arrhenius de CO_2-concentratie toe van 294 ppm tot $294 + 5 \cdot 4 = 314$ ppm.
In de figuur is te zien dat in het jaar 2000 de werkelijke CO_2-concentratie 370 ppm was.
De voorspelling van Arrhenius viel dus 56 ppm te klein uit.

5 In 70 jaar tijd groeit de menselijke component van 15 ppm in 1930 tot $370 - 285 = 85$ ppm in 2000.
De groeifactor per 70 jaar is $\frac{85}{15} \Rightarrow$ de groeifactor per 10 jaar is $\left(\frac{85}{15}\right)^{\frac{1}{7}} = 1{,}2812...$
In 10 jaar is de menselijke component met ongeveer 28% toegenomen.

6 Het natuurlijke niveau in de CO_2-concentratie is 285 ppm.
In de formule $C = 15 \cdot 1{,}025^t + 285$ is de term $15 \cdot 1{,}025^t$ dus de menselijke component.
Als de menselijke component in de CO_2-concentratie even groot is als het natuurlijke niveau dan geldt: $15 \cdot 1{,}025^t = 285 \Leftrightarrow 1{,}025^t = \frac{285}{15} = 19 \Leftrightarrow t = {}^{1{,}025}\log(19) \approx 119{,}24$
$t = 0$ op 1 juli 1930 $\Rightarrow$ $t = 119$ op 1 juli 2049 $\Rightarrow$ $t = 119{,}24$ in het najaar van 2049 (bijna een kwart jaar na 1 juli 2049).
De menselijke component en het natuurlijke niveau zijn even groot in het jaar 2049.

Medicijnen voorschrijven

7 Voor 1991 ($t = 0$) geldt: $A(0) = 3900 \cdot 1{,}3^0 = 3900$ personen. De vraag is na hoeveel jaar dit aantal is gestegen tot 39 000.
$3900 \cdot 1{,}3^t = 39\,000 \Leftrightarrow 1{,}3^t = 10 \Leftrightarrow t = {}^{1{,}3}\log(10) = 8{,}77... \Rightarrow$ na 9 jaar is het aantal personen dat Rustical krijgt voorgeschreven, tien keer zo groot geworden.
De vergelijking $3900 \cdot 1{,}3^t = 39\,000$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost.

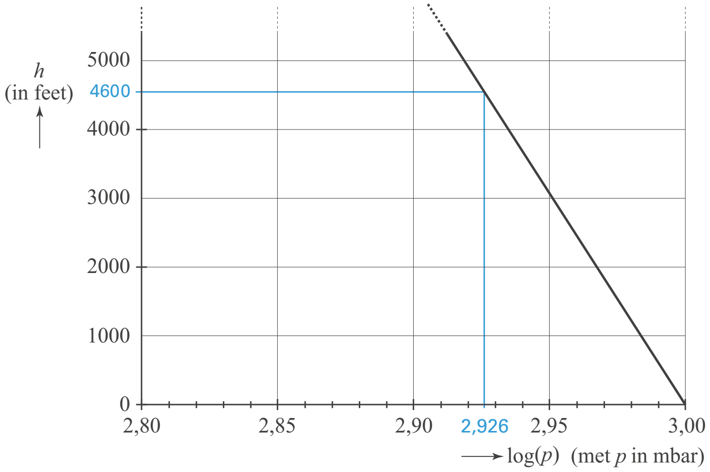
8 In 1996 was het aantal recepten 42 000 en in 1999 was dat 157 000.
De groeifactor per 3 jaar is $\frac{157\,000}{42\,000} \Rightarrow$
de groeifactor per jaar is $\left(\frac{157\,000}{42\,000}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}55$.
Bij een groeifactor 1,55 hoort een toename van 55% per jaar.

9 Voor 1996 geldt $t = 5 \Rightarrow A(5) = 3900 \cdot 1{,}3^5 = 14\,480{,}427$ dus in 1996 kregen 14 480 patiënten Rustical voorgeschreven, dus $\frac{42\,000}{14\,480} = 2{,}90...$ recepten per patiënt.
Voor 1999 geldt $t = 8 \Rightarrow A(8) = 3900 \cdot 1{,}3^8 = 31\,813{,}49...$ dus in 1999 kregen 31 813 patiënten Rustical voorgeschreven, dus $\frac{157\,000}{31\,813} = 4{,}93...$ recepten per patiënt.
Het gemiddeld aantal recepten per patiënt is van 1996 tot 1999 gegroeid met factor $\frac{4{,}93...}{2{,}90...} \approx 1{,}70 \Rightarrow$ de toename is 70%.

Luchtdruk en hoogte

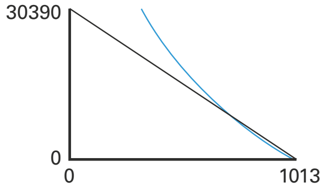
10 De luchtdruk neemt af met 1 millibar per 30 feet stijging dus met $\frac{1}{30}$ millibar per foot stijging. Als op hoogte $h = 0$ de luchtdruk 1013 millibar is, volgt hieruit de formule
$p = 1013 - \frac{1}{30}h \Leftrightarrow 30p = 30 \cdot (1013 - \frac{1}{30}h) \Leftrightarrow 30p = 30\,390 - h \Leftrightarrow h = 30\,390 - 30p$

11 $p = 843 \Rightarrow \log(p) = \log(843) \approx 2{,}926$
Bij deze waarde van $\log(p)$ kan in de figuur een hoogte van ongeveer 4600 feet worden afgelezen.



De formule geeft voor $p = 843$ als uitkomst $h = 30\,390 - 30 \cdot 843 = 5100$ feet.
De afgelezen waarde verschilt 500 feet met de berekende waarde.

12 De beide formules geven dezelfde uitkomst als
$30\,390 - 30p = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p))$
Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 30\,390 - 30x$ en $y_2 = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(x))$ en bereken met behulp van *intersect* voor welke waarde van x de grafieken elkaar snijden. Dit geeft $x \approx 717{,}77$.
Voor $p = 718$ millibar leveren beide formules dezelfde hoogte op.



13 $h = 0 \Rightarrow 0 = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p)) \Leftrightarrow \log(p) = 3 \Leftrightarrow p = 10^3 = 1000$
$h = 1000 \Rightarrow 1000 = 61\,500 \cdot (3{,}00 - \log(p)) \Leftrightarrow 1000 = 184\,500 - 61\,500 \cdot \log(p) \Leftrightarrow$
$61\,500 \cdot \log(p) = 183\,500 \Leftrightarrow \log(p) = \frac{183\,500}{61\,500} = 2{,}98... \Leftrightarrow p = 10^{2{,}98...} = 963{,}25...$

$\frac{963{,}25... - 1000}{1000} \cdot 100 = -3{,}67...\% \Rightarrow$ de luchtdruk neemt af met ongeveer 3,7%

Diergemeenschappen in Afrika

14 Van soort 0 naar soort 3 is drie stappen. De groeifactor van het gewicht per stap is 1,35 dus soort 3 is $1{,}35^3$ keer zo zwaar als soort 0.
gewicht soort 3 $= 1{,}35^3 \cdot$ *gewicht soort 0* $\Rightarrow 7{,}8 = 1{,}35^3 \cdot$ *gewicht soort 0* $\Rightarrow$

gewicht soort 0 $= \frac{7{,}8}{1{,}35^3} \approx 3{,}2$ dus de lichtste soort weegt ongeveer 3,2 kg.

15 Van rangnummer 71 naar rangnummer 92 zijn 21 stappen.
Noem de gewichtsratio g. Dan moet gelden: $g^{21} = \frac{631}{164} \Leftrightarrow g = \sqrt[21]{\frac{631}{164}} \approx 1{,}07$

(of $g = \left(\frac{631}{164}\right)^{\frac{1}{21}} \approx 1{,}07$)

© ThiemeMeulenhoff

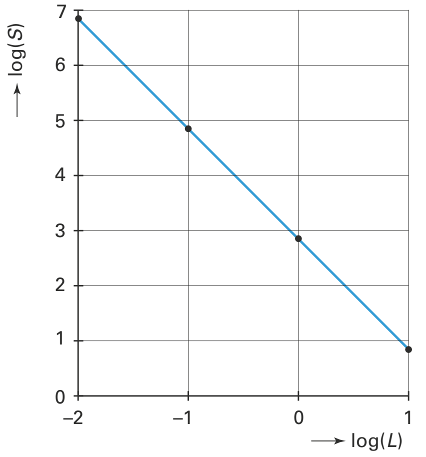
16 Hoe vaak moet 631 met 1,06 vermenigvuldigd worden om op 3550 uit te komen?
$631 \cdot 1{,}06^x = 3550 \Leftrightarrow 1{,}06^x = \frac{3550}{631} \Leftrightarrow x = {}^{1{,}06}\log\left(\frac{3550}{631}\right) \approx 29{,}6$
Dat betekent dat er na de Kaapse buffel nog 30 opeenvolgende soorten waren.
Omdat er nu nog drie van over zijn (de rangnummers 93, 94 en 95) zijn er 27 soorten uitgestorven.
andere manier
De vergelijking $631 \cdot 1{,}06^x = 3550$ kan ook met de rekenmachine worden opgelost:
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 631 \cdot 1{,}06^x$ en $y_2 = 3550$ en bereken met *intersect* het snijpunt van de grafieken. Dit geeft $x \approx 29{,}645$. Verder zoals hierboven.

17 De formule $\log(W) = 0{,}075N + 0{,}4$ moet omgewerkt worden tot $W = b \cdot g^N$.
Het grondtal van deze log is 10, dus ${}^{10}\log(W) = 0{,}075N + 0{,}4 \Rightarrow$
$W = 10^{0{,}075N + 0{,}4} = 10^{0{,}075N} \cdot 10^{0{,}4} = (10^{0{,}075})^N \cdot 10^{0{,}4} = 10^{0{,}4} \cdot (10^{0{,}075})^N \Rightarrow$
$b = 10^{0{,}4} \approx 2{,}5$ en $g = 10^{0{,}075} \approx 1{,}2$

Diersoorten

18 Als de lengte van een diersoort 10 cm is, geldt $L = 0{,}1$ m dus dan zijn er
$S = \frac{700}{0{,}1^2} = 70\,000$ diersoorten van 10 cm lang.
Als de lengte van een diersoort 50 cm is, geldt $L = 0{,}5$ m dus dan zijn er
$S = \frac{700}{0{,}5^2} = 2800$ diersoorten van 50 cm lang.
Het aantal diersoorten van 10 cm lengte is $\frac{70\,000}{2800} = 25$ maal zo groot.

19 In de opgave is gegeven dat de grafiek van $\log(S)$ als functie van $\log(L)$ een rechte lijn wordt op het grafiekenpapier dus het is voldoende om twee punten te bepalen.
$\log(L) = -2 \Leftrightarrow L = 10^{-2} = 0{,}01 \Rightarrow$
$S = \frac{700}{0{,}01^2} = 7\,000\,000 \Rightarrow$
$\log(S) = \log(7\,000\,000) \approx 6{,}85$
Dit geeft het punt (–2; 6,85).
$\log(L) = 1 \Leftrightarrow L = 10 \Rightarrow S = \frac{700}{10^2} = 7 \Rightarrow$
$\log(S) = \log(7) \approx 0{,}85.$
Dit geeft het punt (1; 0,85).
Nu kan de grafiek worden getekend.
Andere punten die ook hadden kunnen worden berekend: (–1; 4,85) en (0; 2,85)

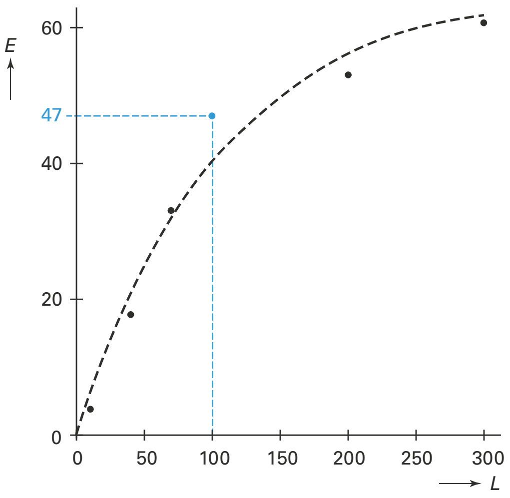


20 *Gebruik de rekenregels voor logaritmen.*
$S = \frac{700}{L^2} \Rightarrow \log(S) = \log\left(\frac{700}{L^2}\right) = \log(700) - \log(L^2) = \log(700) - 2 \cdot \log(L) \Rightarrow$
$p = \log(700)$ en $q = -2$
Er wordt geen exact antwoord gevraagd dus p mag worden afgerond, bijvoorbeeld $p \approx 2{,}85$.

© ThiemeMeulenhoff

Sluipwespen

21 Voor $L = 100$ geldt volgens de formule $E = 64 \cdot (1 - 0{,}6^{0{,}02 \cdot 100}) = 64 \cdot (1 - 0{,}6^2) = 40{,}96$ dus 41 larven met eitjes. Aflezen in de figuur in de opgave bij $L = 100$ geeft $E = 47$.



Het verschil tussen beide methoden is 6 larven met eitjes.

22 $0{,}6^{0{,}02L} = \left(0{,}6^{0{,}02}\right)^L \approx (0{,}9898...)^L$. De groeifactor is kleiner dan 1 dus voor grote waarden van L nadert $0{,}6^{0{,}02L}$ naar nul maar de uitkomst blijft steeds positief $\Rightarrow$ de factor $(1 - 0{,}6^{0{,}02L})$ nadert voor grote waarden van L naar 1 maar is nooit groter dan 1. Dus E nadert naar 64 voor grote waarden van L en is nooit groter dan 64. De grenswaarde is 64.

Mosselen

23 Voor de filtercapaciteit van deze mossel met lengte $L = 29$ mm geldt:

$$C = \frac{52{,}7}{1 + 179 \cdot 0{,}693^{29}} = 52{,}474... \text{ ml/uur}$$

Dat is per dag $24 \cdot 52{,}474... \approx 1259$ ml = 1,259 liter.
De bewering is inderdaad in overeenstemming met de formule.

24 Als L steeds groter wordt, dan daalt de uitkomst van $0{,}693^L$ naar 0. De uitkomst van $179 \cdot 0{,}693^L$ daalt dan ook naar 0 en $1 + 179 \cdot 0{,}693^L$ (de noemer van de formule voor C) daalt naar 1.

Dan stijgt C naar $\frac{52{,}7}{1}$, dus $C = 52{,}7$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van C.

25 $L = 30$ en $W = 0{,}12$ invullen geeft $0{,}12 = a \cdot 30^b$.
$L = 70$ en $W = 1{,}51$ invullen geeft $1{,}51 = a \cdot 70^b \Leftrightarrow a = \frac{1{,}51}{70^b}$ en dit substitueren in de eerste vergelijking:

$$0{,}12 = \frac{1{,}51}{70^b} \cdot 30^b \Leftrightarrow 0{,}12 = 1{,}51 \cdot \frac{30^b}{70^b} \Leftrightarrow \frac{0{,}12}{1{,}51} = \left(\frac{3}{7}\right)^b \Leftrightarrow b = {}^{\frac{3}{7}}\log\left(\frac{0{,}12}{1{,}51}\right) = 2{,}988...$$

Hiermee a berekenen: $0{,}12 = a \cdot 30^{2{,}988...} \Leftrightarrow a = \frac{0{,}12}{30^{2{,}988...}} = 4{,}617... \times 10^{-6}$

Dus $a \approx 4{,}6 \times 10^{-6}$ en $b \approx 3{,}0$.

26 $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L) \Rightarrow$

$W = 10^{-5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)} \Rightarrow$

$W = 10^{-5{,}5} \cdot 10^{3{,}1 \cdot \log(L)} \Rightarrow$

$W = 10^{-5{,}5} \cdot \left(10^{\log(L)}\right)^{3{,}1} \Rightarrow$

$W = 10^{-5{,}5} \cdot L^{3{,}1}$

Het HABOG

27 De groeifactor van de warmteafgifte per 100 jaar is $\frac{180}{1800} = 0{,}1$.

De groeifactor per jaar is dan $(0{,}1)^{\frac{1}{100}} = 0{,}97723...$

Na een jaar is er nog 97,723...% over dus de warmteafgifte neemt per jaar 2,28% af.

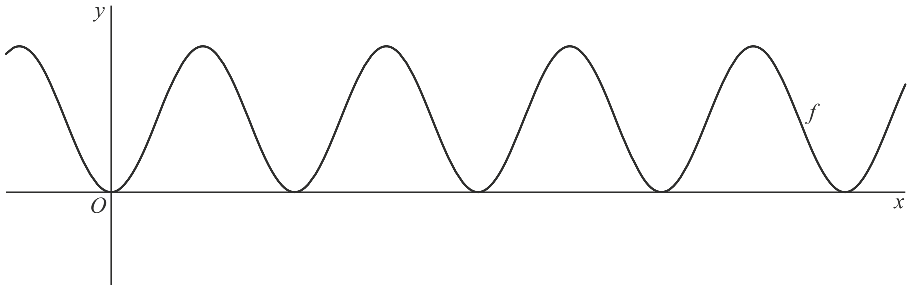
28 Als de warmteafgifte met 2,3% per jaar af neemt, is de groeifactor $1 - 0{,}023 = 0{,}977$.
De warmteafgifte is gehalveerd als $1800 \cdot 0{,}977^t = 900 \Leftrightarrow$
$0{,}977^t = 0{,}5 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}977}\log(0{,}5) = 29{,}78...$
Na ongeveer 29,8 jaar is de warmteafgifte gehalveerd.
Als je de groeifactor 0,97723... uit de vorige vraag gebruikt, is de halveringstijd 30,1 jaar.

29 $W = 1800 \cdot 10^{-0{,}01t} \Leftrightarrow \frac{W}{1800} = 10^{-0{,}01t} \Leftrightarrow -0{,}01t = \log\left(\frac{W}{1800}\right) \Leftrightarrow t = -100 \cdot \log\left(\frac{W}{1800}\right)$

4 Periodieke functies

Een cosinusfunctie

In de figuur is de grafiek getekend van de functie *f* gegeven door
$f(x) = (\sin(x) \cdot \cos(x))^2$.



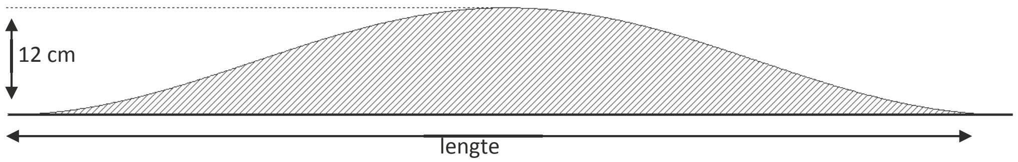
1 Bereken op algebraïsche wijze de *x*-coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van *f* en de *x*-as op het interval $[0, \pi]$.

De grafiek van *f* kan ook worden beschreven door middel van één enkele cosinus-functie. Er geldt $f(x) = a - b \cdot \cos(cx)$.

2 Bereken *a*, *b* en *c*.

Verkeersdrempels

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm.
Zie de onderstaande figuur.



Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}\pi)$$

Hierin is *h* de hoogte en *x* de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

3 Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is.

4 Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

De helling van de drempel is niet overal even groot.

5 Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm:

$h = a + b\sin(c(x - d))$

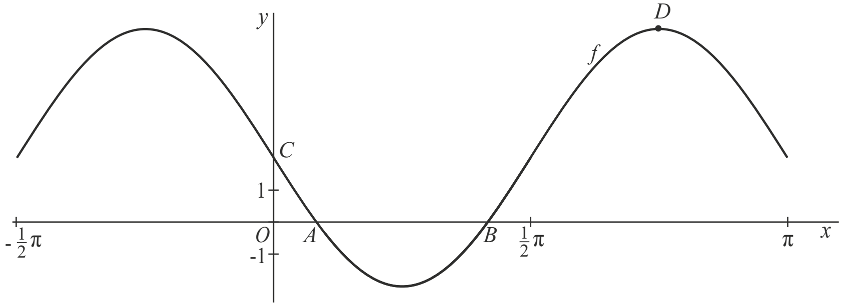
Ook hier is *h* de hoogte en *x* de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

6 Hoe groot zijn *a*, *b*, *c* en *d*?

Sinusoïde

Op het domein $[-\frac{1}{2}\pi, \pi]$ is de functie *f* gegeven door $f(x) = 2 - 4\sin(2x)$.

De grafiek van *f* snijdt de *x*-as in de punten *A* en *B*. Zie de figuur.



7 Bereken exact de *x*-coördinaten van de punten *A* en *B*.

De grafiek van *f* snijdt de *y*-as in punt *C*. Punt *D* is een top van de grafiek.

De *x*-coördinaat van *D* ligt tussen $\frac{1}{2}\pi$ en π.

Lijn *l* gaat door de punten *C* en *D* en snijdt de *x*-as in punt *E*.

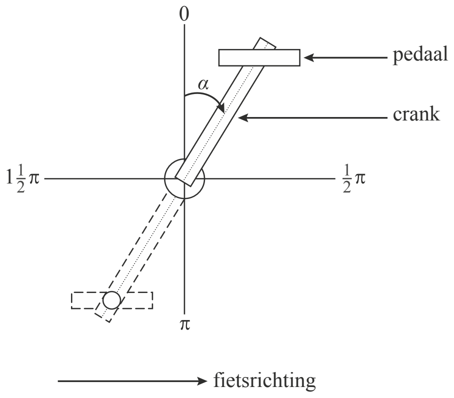
8 Bereken exact de *x*-coördinaat van punt *E*.

Fietssnelheid

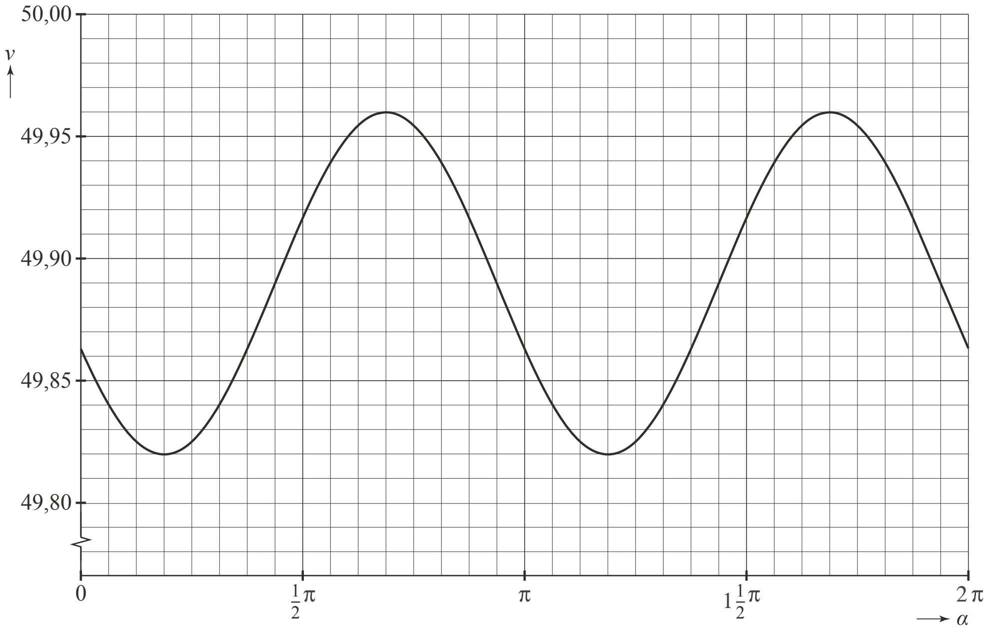
Fietsen met een constante snelheid is in de praktijk niet mogelijk omdat de kracht die op de pedalen wordt uitgeoefend, afhangt van de stand van de crank. De grootte van de hoek tussen de crank en de verticale richting in radialen noemen we α . Zie figuur 1.

In figuur 2 is de snelheid v van een wielrenner in km/uur uitgezet tegen α .

figuur 1



figuur 2



De grafiek in figuur 2 is te beschrijven met een formule van de vorm $v = p + q\sin(r(\alpha - s))$.

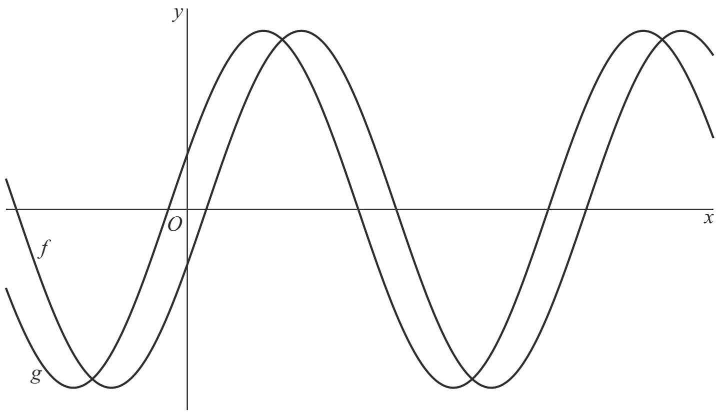
9 Bepaal mogelijke waarden van p, q, r en s.

© ThiemeMeulenhoff

Sinusoïdes

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi)$ en $g(x) = 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$.

Deze twee functies hebben dezelfde evenwichtsstand en dezelfde periode.
In de figuur zie je (een deel van) de grafieken van de functies f en g.



Je kunt de grafiek van f horizontaal over een afstand m verschuiven, zodat deze samenvalt met de grafiek van g.

10 Bereken exact een mogelijke waarde van m.

De verschilfunctie v is gegeven door $v(x) = f(x) - g(x)$. Hieruit volgt dat $v(x)$ kan worden geschreven in de vorm $v(x) = a + b\sin(c(x - d))$.

11 Bereken mogelijke waarden van a, b, c en d. Rond de gevonden waarden zo nodig af op twee decimalen.

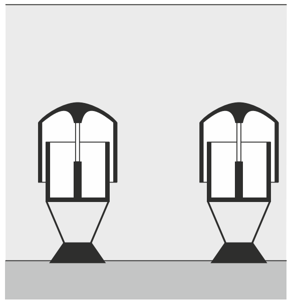
© ThiemeMeulenhoff

Archimedes Wave Swing

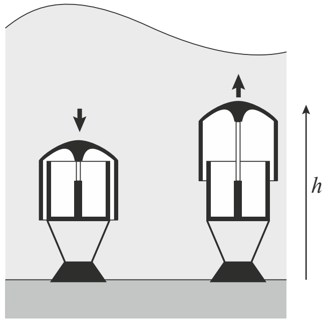
De Archimedes Wave Swing (afgekort AWS) is ontwikkeld om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken.

Elke AWS bestaat uit twee halfopen delen. Het onderste deel is verankerd aan de zeebodem. Het bovenste deel, ook wel drijver genoemd, valt over het onderste heen. In figuur 1 zie je twee AWS'en onder een vlakke zeespiegel. In figuur 2 zie je dat de golven er voor zorgen dat de drijvers op en neer bewegen.
Deze beweging van de drijver wordt gebruikt om energie op te wekken.

figuur 1



figuur 2



De minimale hoogte van de bovenkant van de drijver ten opzichte van de zeebodem is 30,0 meter. De maximale hoogte is 37,0 meter. De drijver maakt onder invloed van de golven een periodieke beweging met dezelfde periode als de periode van de golfbeweging.

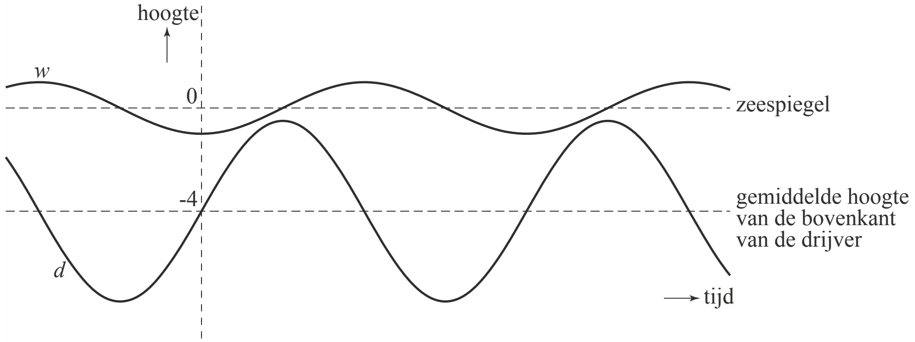
We gaan voor de volgende vraag uit van een situatie waarbij de periode van de golfbeweging 12 seconden is en de hoogte van de bovenkant van de drijver van de AWS varieert van 30,0 meter tot en met 37,0 meter. De hoogte van de bovenkant van de drijver kan dan worden beschreven door een formule van de vorm $h = a + b\sin(c \cdot t)$. Hierin is h de hoogte ten opzichte van de zeebodem in meter en t de tijd in seconde.

12 Bereken de waarden van a, b en c in deze formule. Licht je antwoord toe.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte.
Zie figuur 3. De hoogte d van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door: $d = -4{,}0 + 3{,}5\sin(0{,}5t)$, met d de hoogte in meter en t de tijd in seconde.
De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule $w = -A \cdot \cos(0{,}5t)$. Hierin is w de waterhoogte in meter, A de amplitude van de golven ($A \geq 0{,}5$) in meter en t de tijd in seconde.
In figuur 3 zijn grafieken van d en w getekend voor een bepaalde waarde van A.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 3

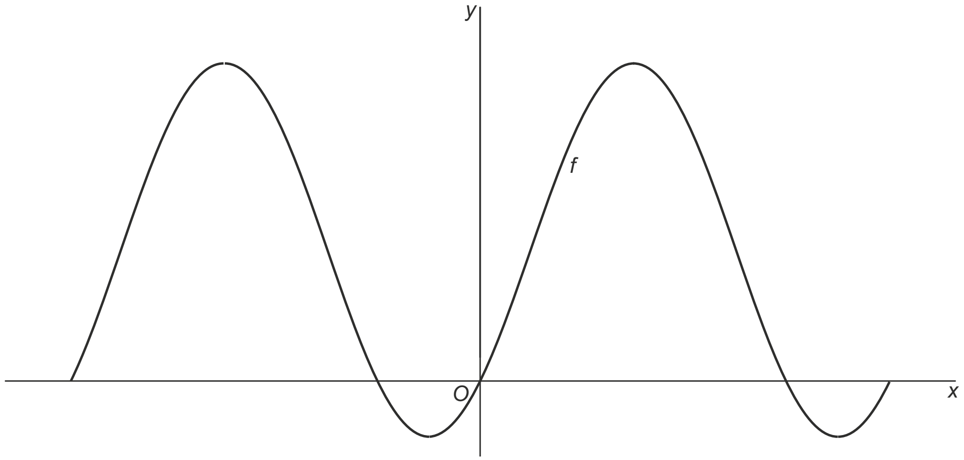


In de situatie van figuur 3 blijft de bovenkant van de drijver altijd onder water.
Maar als de amplitude van de golfbeweging verder toeneemt, kan de drijver soms boven het water uitsteken.

13 Onderzoek met de grafische rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbe-we-ging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

Sinus-cosinusfunctie

Op het interval $[-\pi, \pi]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$.
In de figuur zie je de grafiek van f.



14 Bereken op algebraïsche wijze de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

De grafiek van f is een sinusoïde. De periode van deze sinusoïde is π. In de vergelijking $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ geldt dus $b = 2$.

15 Bereken waarden van a, c en d zodat $y = a \cdot \sin(2(x + c)) + d$ een vergelijking is van deze sinusoïde. Licht je werkwijze toe en rond je antwoorden af op twee decimalen.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 4

1 De gevraagde gemeenschappelijke punten zijn de nulpunten van *f*.

2 Door het resultaat van de vorige vraag te gebruiken, kan deze vraag geheel algebraisch worden opgelost. Gebruik van de rekenmachine is wel toegestaan.

3 De lengte van de verkeersdrempel is gelijk aan een periode van de grafiek van *h*.

4 Oplossen met de rekenmachine.

5 Een sinusoïde is het steilst bij het passeren van de evenwichtsstand.

6 *a* is evenwichtsstand, *b* de amplitude, *c* heeft iets met de periode te maken en *d* bepaalt de horizontale verschuiving.

7 Los de vergelijking $2 - 4\sin(2x) = 0$ op, door gebruik te maken van bekende eigenschappen van $y = \sin(x)$.

8 Bereken de coördinaten van *C* en *D*. Stel een vergelijking op van *l*.

9 De evenwichtsstand ligt precies tussen minimum en maximum.

10 Ga na welke transformaties leiden tot $f(x)$ of $g(x)$ vanuit $y = 4\sin(x)$.

11 Plot $v(x)$ en bereken met de rekenmachine de noodzakelijke toppen en nulpunten.

12 De periode is $\frac{2\pi}{c}$ en de evenwichtsstand ligt precies tussen de maximale en minimale hoogte in.

13 Als de drijver boven water verschijnt, dan moet $w - d$ kleiner dan nul zijn. Probeer met de grafische rekenmachine uit voor welke waarden van amplitude *A* dit gebeurt.

14 $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ of $B = 0$

15 Bereken de coördinaten van de toppen om de evenwichtswaarde te bepalen. Bereken een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat om *c* te berekenen.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 4

Een cosinusfunctie

1 Nulpunten van *f* zoeken door op te lossen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(\sin(x) \cdot \cos(x))^2 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ of $\cos(x) = 0$

De nulpunten van $y = \sin(x)$ op $[0, \pi]$ zijn $x = 0$ en $x = \pi$.

Het nulpunt van $y = \cos(x)$ op $[0, \pi]$ is $x = \frac{1}{2}\pi$.

Op het interval $[0, \pi]$ zijn de *x*-coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van *f* en de *x*-as: $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$ en $x = \pi$.

2 Tussen de nulpunten $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ doorloopt *f* een complete golf dus de periode is $\frac{1}{2}\pi \Rightarrow c = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} = 4$

Tussen de nulpunten $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ heeft *f* een maximum bij $x = \frac{1}{4}\pi$.

$f(\frac{1}{4}\pi) = \left(\sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ is het maximum.

Het minimum van *f* is 0 want *f* kan niet negatief worden.

De evenwichtsstand is dan $a = \frac{1}{8}$ en de amplitude is $b = \frac{1}{8}$.

De berekening van het maximum mag ook met de rekenmachine gedaan worden, maar stel dan de rekenmachine in op radialen.

Verkeersdrempels

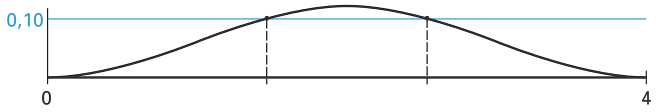
Rekenmachine instellen op radialen.

3 De lengte van de verkeersdrempel is gelijk aan een periode van de grafiek van *h*.

Periode $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ dus de lengte van deze drempel is 4 meter.

4 Uitzoeken na hoeveel meter de hoogte van de drempel 0,10 meter (= 10 cm) is.

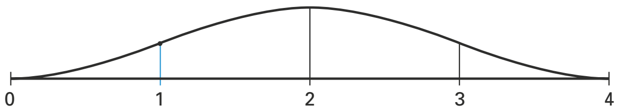
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = 0{,}10$.



De optie *intersect* geeft $x = 1{,}4645...$ en $x = 2{,}5354...$

Het verschil is 1,0708... dus over een lengte van 1,07 meter (of 107 cm) is de drempel meer dan 10 cm hoog.

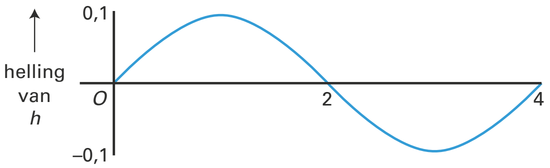
5 De verkeersdrempel begint voor $x = 0$ op het laagste punt en bereikt een halve periode later, dus voor $x = 2$, het hoogste punt. Precies hiertussen is de helling maximaal, dus 1 meter vanaf het begin.



© ThiemeMeulenhoff

andere manier
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$.

In de grafiek van y_2 de plaats van het maximum bepalen met de optie *maximum*.



Er is een maximum voor $x = 1$ dus 1 meter vanaf het begin heeft de drempel een maximale helling.
NB: de grafiek hierboven lijkt een sinusoïde maar het is nog niet zeker of dat ook zo is. Je mag dus niet alleen op grond van de grafiek zeggen dat het maximum bij x = 1 ligt.
derde manier
$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi) \Leftrightarrow h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$. Aan de laatste formule kun je zien dat de grafiek 1 eenheid naar rechts is geschoven, dus dat de grafiek voor $x = 1$ stijgend door de evenwichtsstand gaat. Na 1 meter heeft deze drempel maximale helling.

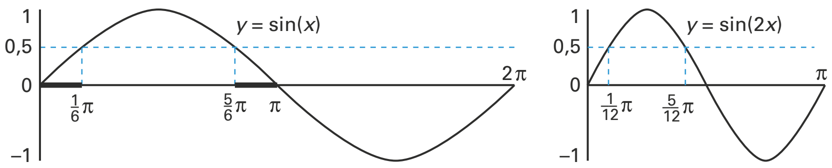
6 De verkeerdrempel is 12 meter lang, dus de periode is 12 $\Rightarrow$ $c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.
h is minimaal 0 en maximaal 14 cm dus de evenwichtsstand is $a = 0{,}07$ meter.
De amplitude b is ook 0,07 meter.
Na een kwart periode gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, dus als $x = 3$.
Omdat er in de formule een minteken voor d staat, geldt $d = 3$.

Samengevat: $a = 0{,}07$; $b = 0{,}07$; $c = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 3$.

Sinusoïde

7 *Rekenmachine instellen op radialen.*
Voor de punten A en B geldt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow 4\sin(2x) = 2 \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$



De vergelijking $\sin(x) = \frac{1}{2}$ heeft op $[0, 2\pi]$ de oplossingen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

Hieruit volgt: $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{6}\pi$ of $2x = \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}\pi$ of $x = \frac{5}{12}\pi$

De x-coördinaat van A is $\frac{1}{12}\pi$ en die van B is $\frac{5}{12}\pi$.

© ThiemeMeulenhoff

8 $f(0) = 2 - 4\sin(0) = 2$ dus de coördinaten van C zijn $(0, 2)$.
De x-coördinaten van A en B zijn $\frac{1}{12}\pi$ en $\frac{5}{12}\pi$ dus de top tussen A en B heeft x-coördinaat $\frac{3}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi$.

De periode van f is π dus de x-coördinaat van D is $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{4}\pi$.

$f(\frac{3}{4}\pi) = 2 - 4\sin(2 \cdot \frac{3}{4}\pi) = 2 - 4 \cdot -1 = 6$ dus de coördinaten van D zijn $(\frac{3}{4}\pi, 6)$.

De helling van de lijn l door C en D is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{16}{3\pi}$.

Een vergelijking van de lijn l is dan $y = \frac{16}{3\pi}x + 2$.

Deze lijn snijdt de x-as als $\frac{16}{3\pi}x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3\pi}x = -2 \Leftrightarrow x = -2 \cdot \frac{3\pi}{16} = -\frac{3}{8}\pi$.

De x-coördinaat van E is $-\frac{3}{8}\pi$.

Fietssnelheid

9 De evenwichtsstand p ligt bij $\frac{\text{minimum} + \text{maximum}}{2} = \frac{49{,}82 + 49{,}96}{2} = 49{,}89$ km/uur dus $p = 49{,}89$.
De amplitude q is de maximale uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand dus $q = 49{,}96 - 49{,}89 = 0{,}07$
De periode van de sinusoïde is π dus $r = \frac{2\pi}{\text{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow r = 2$
De sinusoïde gaat stijgend door de evenwichtsstand na 7 hokjes, gerekend vanaf $\alpha = 0$.
7 hokjes komt overeen met $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2}\pi$ dus $s = \frac{7}{16}\pi$.

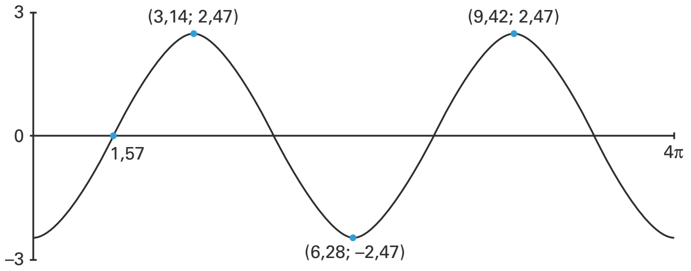
Samengevat: $p = 49{,}89$; $q = 0{,}07$; $r = 2$ en $s = \frac{7}{16}\pi$.

Sinusoïdes

10 De grafiek van $y = 4\sin(x)$ gaat door de oorsprong.
De grafiek van $f(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi)$ kan uit die van $y = 4\sin(x)$ worden verkregen door deze $\frac{1}{10}\pi$ naar rechts te verschuiven.
De grafiek van $g(x) = 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$ kan uit die van $y = 4\sin(x)$ worden verkregen door deze $\frac{1}{10}\pi$ naar links te verschuiven.
De grafiek van $g(x)$ kan uit die van $f(x)$ worden verkregen door deze $\frac{2}{10}\pi$ naar links te verschuiven.

© ThiemeMeulenhoff

11 *Rekenmachine instellen op radialen.*



Voer in de rekenmachine in $y_1 = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi) - 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$.

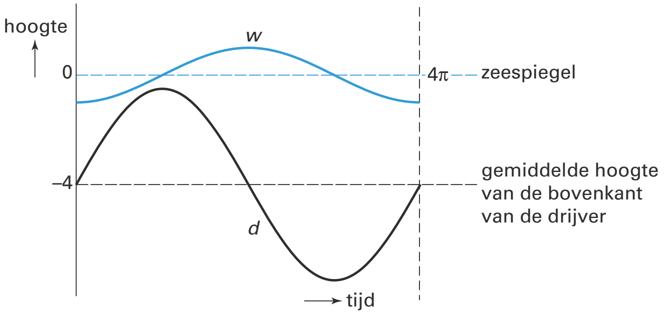
Bepaal met behulp van de opties *maximum* en *minimum* drie opeenvolgende toppen van de grafiek. Dit geeft (3,14; 2,47), (6,28; –2,47) en (9,42; 2,47).
Hieruit valt af te leiden dat de x-as de evenwichtsstand is, dus $a = 0$.
Verder volgt hieruit dat de amplitude 2,47 is, dus $b = 2{,}47$.
De afstand tussen twee opeenvolgende maxima is 9,42 – 3,14 = 6,28 dus de periode is 6,28 en dat is dezelfde periode als een standaardsinus dus $c = 1$.
Bepaal met behulp van de optie *zero* een nulpunt van y_1. Dit geeft $x \approx 1{,}57$ dus voor $x \approx 1{,}57$ gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand. Hieruit volgt $d = 1{,}57$.

Archimedes wave swing

12 De periode van h is 12 sec dus $12 = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.

De hoogte varieert van 30,0 tot 37,0 meter dus de evenwichtsstand is $a = 33{,}5$ m.
De amplitude b is de maximale uitslag ten opzichte van de evenwichtsstand, dus $b = 37{,}0 - 33{,}5 = 3{,}5$ m.

13 Omdat beide functies periodiek zijn met dezelfde periode, namelijk $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$ sec, is het voldoende om het interval $[0, 4\pi]$ als onderzoeksgebied te nemen.



Zolang het verschil $w - d$ niet negatief wordt, blijft de drijver onder water. Vul de verschilgrafiek $y_1 = -A \cdot \cos(0{,}5x) - (-4 + 3{,}5\sin(0{,}5x))$ in de rekenmachine in voor verschillende waarden van A ($A \geq 0$). Onderzoek of het minimum van y_1 negatief wordt of niet. Dit levert na herhaaldelijk uitproberen de volgende resultaten:

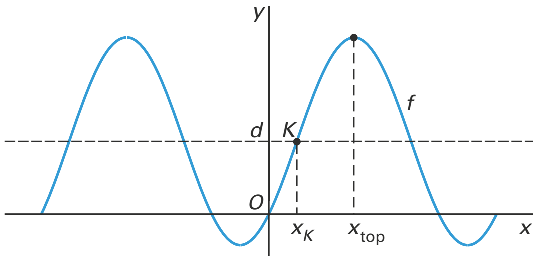
A	minimum van y_1
1,9	0,0175...
2,0	–0,031...

Als de amplitude 2,0 meter of groter is, steekt de drijver af en toe boven het water uit.

Sinus-cosinusfunctie

14 Voor snijpunten met de x-as geldt $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi) = 0 \Leftrightarrow$
$\sin(x) = 0$ of $\cos(x - \frac{1}{4}\pi) = 0$
Op het domein $[-\pi, \pi]$ geldt: $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$ of $x = 0$ of $x = \pi$
De nulpunten van $\cos(x)$ zijn $\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ en de nulpunten van $\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ liggen ten opzichte hiervan $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts dus bij $x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$
Op het domein $[-\pi, \pi]$ geldt dus: $\cos(x - \frac{1}{4}\pi) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi$ of $x = \frac{3}{4}\pi$
De gevraagde x-coördinaten zijn: $-\pi, -\frac{1}{4}\pi, 0, \frac{3}{4}\pi$ en π

15 Voer in de rekenmachine de formule $y_1 = \sin(x) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$ in op het domein $[-\pi, \pi]$ en bereken met behulp van de opties *maximum* en *minimum* de y-coördinaten van de toppen van f. Het maximum van f is 0,85355... (en wordt bereikt voor $x \approx 1{,}178$) en het minimum is van f is –0,14644... (en wordt bereikt voor $x \approx -0{,}393$).
Hieruit volgt de amplitude $a = \frac{0{,}85355... + 0{,}14644...}{2} \approx 0{,}50$.
Dus voor de evenwichtsstand geldt: $d = 0{,}85355... - a = 0{,}85355... - 0{,}50 \approx 0{,}35$
De evenwichtslijn $y = 0{,}35$ snijdt de grafiek van f in vier punten. We kijken naar het snijpunt K met positieve x-coördinaat waar de grafiek van f stijgend door de evenwichtslijn gaat. Dit snijpunt ligt een kwart periode vóór de top met coördinaten (1,178; 0,854), dus $x_K = x_{top} - \frac{1}{4} \cdot$ *periode* $= 1{,}178 - \frac{1}{4} \cdot \pi \approx 0{,}393$.

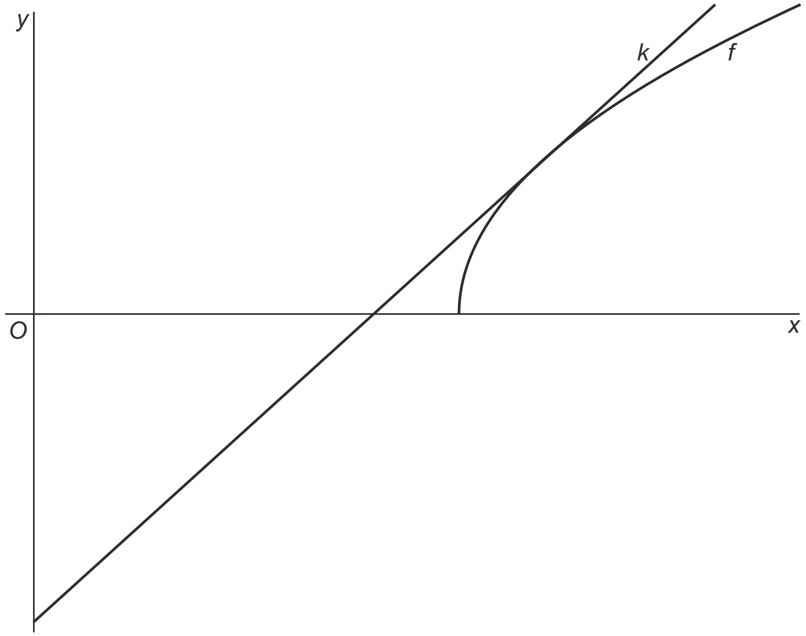


Omdat c in de gegeven vergelijking een verschuiving naar rechts moet aangeven, volgt nu: $c \approx -0{,}39$
De x-coördinaat van punt K kan ook gevonden worden met intersect van y_1 met $y_2 = 0{,}35$.

5 Veranderingen en afgeleide functies

Wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{4x - 5}$. De lijn k heeft als vergelijking $y = 2x + b$.
Voor een bepaalde waarde van b raakt lijn k de grafiek van f.
Hieronder zijn deze lijn k en de grafiek van f te zien.



1 Bereken op algebraïsche wijze deze waarde van b.

Oppervlakte onder grafiek

Gegeven de functie $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20$, met $x > 0$.

Tussen de y-as en het snijpunt van de grafiek met de x-as wordt een punt A op de grafiek gekozen. De projecties van A op de x-as en y-as noemen we respectievelijk P en Q.

2 Bereken exact hoe groot de oppervlakte van rechthoek $OPAQ$ maximaal kan zijn.

© ThiemeMeulenhoff

Productfuncties

De functie f is gegeven door $f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$.

De functie f heeft een minimum.

3 Bereken exact de waarde van x waarbij dit minimum wordt aangenomen.

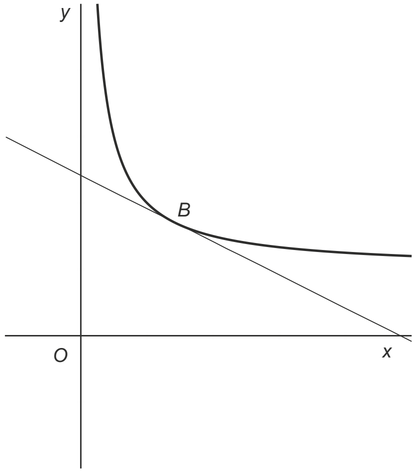
De functie f behoort tot de familie van functies f_a die gegeven zijn door $f_a(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x - a}$.

4 Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarde van a het punt (5, 6) op de grafiek van f_a ligt.

Gebroken functie met raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ met $x > 0$.
Op de grafiek van f wordt een punt B gekozen.

De raaklijn aan de grafiek van f in een punt B heeft een richtingscoëfficiënt van $-\frac{1}{2}$.
Zie de figuur.

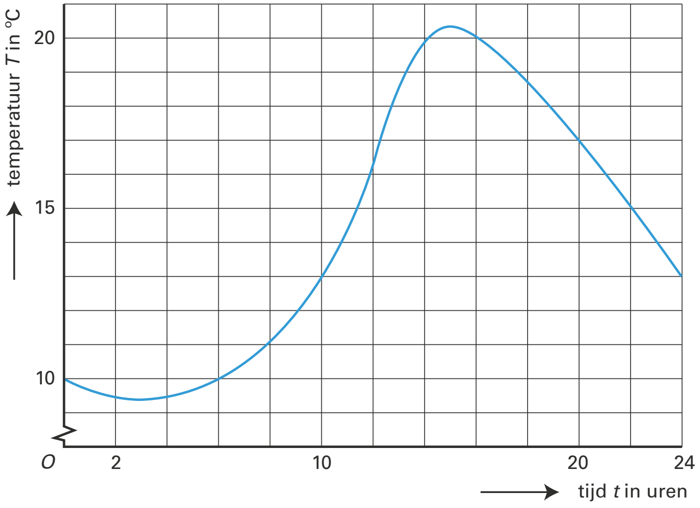


5 Bereken exact een vergelijking van de raaklijn in punt B.

© ThiemeMeulenhoff

Van grafiek naar helling

De grafiek hieronder gaat over het verloop van de temperatuur op een dag in mei.



6 Bereken de snelheid waarmee de temperatuur toeneemt op tijdstip $t = 10$.

7 Schets de grafiek van de afgeleide van T.

Van helling naar grafiek

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4$.

8 Teken de grafiek van f op het interval [–3, 3].

De functie f is de afgeleide van F met $F(0) = 0$.

9 Schets de grafiek van F op hetzelfde interval door gebruik te maken van de grafiek van f uit de vorige vraag.

Top

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - px$.

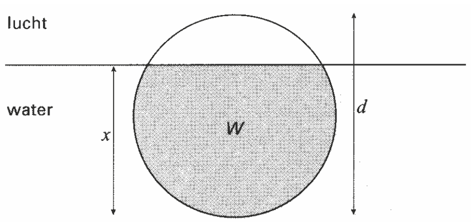
10 Druk de coördinaten van de top van de grafiek van f uit in p.

© ThiemeMeulenhoff

Bal uit het water

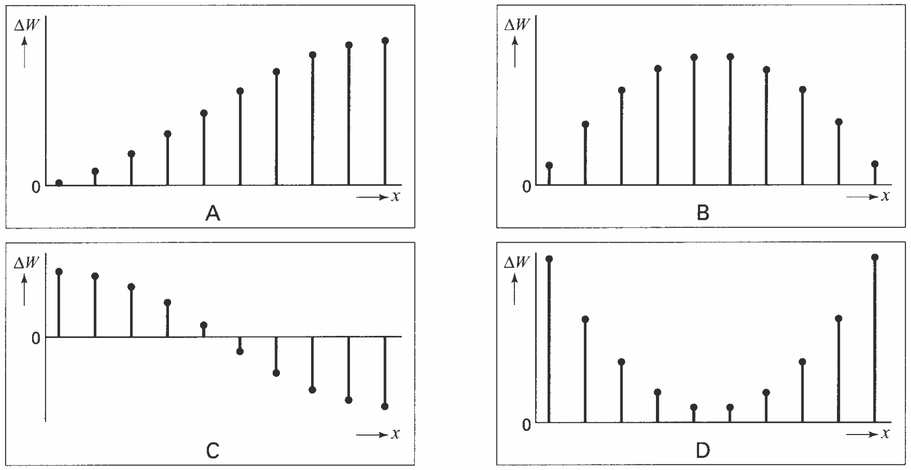
Je hebt vast wel eens in het zwembad met een bal gespeeld. Je hebt dan misschien gemerkt dat het niet meevalt om een bal helemaal onder water te duwen. En heb je de bal onder water dan valt het niet mee hem onder water op zijn plaats te houden. Als je de bal onder water loslaat dan schiet hij omhoog en springt soms een aardig stuk boven het water uit.
In deze opgave nemen we aan dat de bal niet vervormt, dus steeds zuiver rond blijft.

figuur 1



In figuur 1 is de bal gedeeltelijk onder water. De diameter van de bal is *d*. De afstand van de onderkant van de bal tot het wateroppervlak noemen we *x*. *W* is het volume van het deel van de bal dat *onder water* is.
Je hebt de bal boven water en duwt hem langzaam in het water tot hij helemaal onder water is. In figuur 2 zie je vier diagrammen, waarin de *toename* van *W* is weergegeven. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.

figuur 2



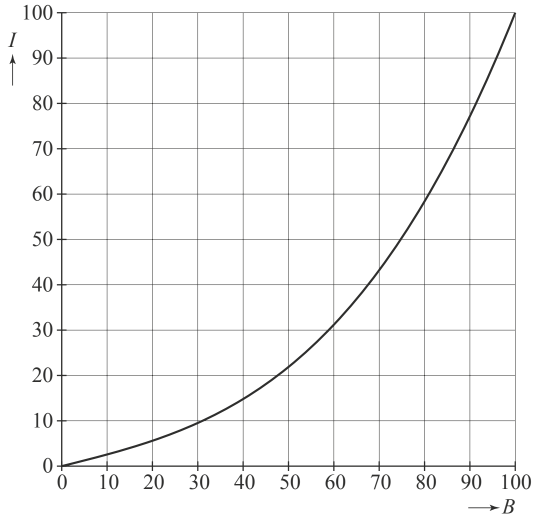
11 Welk van deze toenamediagrammen past bij het onder water duwen van de bal? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Inkomensverdeling

Niet iedereen in een land heeft een even hoog inkomen. Om inzicht te krijgen in de verdeling van de inkomens in een land worden **lorenzcurves** gebruikt.

Bij een lorenzcurve wordt de bevolking gerangschikt van lage inkomens naar hoge inkomens. In de figuur staat een voorbeeld van de lorenzcurve van een land. Deze curve is de grafiek van I als functie van B. Hierin is I het percentage van het totale inkomen van dit land en B het percentage van de bevolking, waarbij de bevolking van lage inkomens naar hoge inkomens is gerangschikt.



Uit de figuur valt bijvoorbeeld af te lezen dat de minst verdienende 30% van de bevolking van dit land tezamen bijna 10% van het totale inkomen van dit land heeft.
De formule die bij de lorenzcurve in de figuur hoort, is $I = 0{,}25B + 0{,}000075B^3$ waarbij $0 \leq I \leq 100$ en $0 \leq B \leq 100$.

Als in dit land iedereen een even hoog inkomen zou hebben, dan zou de lorenzcurve het lijnstuk zijn met beginpunt (0, 0) en eindpunt (100, 100).

Het punt op de lorenzcurve waar de raaklijn aan de curve evenwijdig is aan het lijnstuk met beginpunt (0, 0) en eindpunt (100, 100), is de grens tussen een bovengemiddeld en een benedengemiddeld inkomen.

12 Bereken met behulp van differentiëren hoeveel procent van de bevolking van dit land een bovengemiddeld inkomen heeft.

In het algemeen is de formule die bij een lorenzcurve hoort van de vorm
$I = a \cdot B + 100^{1-p} \cdot (1 - a) \cdot B^p$. Hierbij is $0 \leq a \leq 1$ en $p \geq 1$.

De grafiek bij deze formule gaat voor alle waarden van a en p door de punten (0, 0) en (100, 100).

13 Toon dit aan.

Kies $p = 3$. Bij deze keuze is er een waarde van a waarvoor de formule een lorenzcurve geeft van een land waarin de minst verdienende 50% van de bevolking tezamen 17% van het totale inkomen van het land heeft.

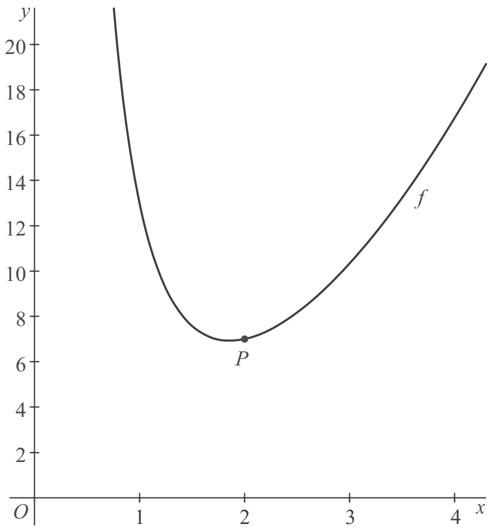
14 Bereken deze waarde van a.

© ThiemeMeulenhoff

Grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 + 12x^{-2}$, met $x > 0$.

In onderstaande figuur is de grafiek van f getekend.



Op de grafiek van f ligt het punt P met coördinaten (2, 7) .

15 Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van de raaklijn aan de grafiek in P.

Een horizontale lijn snijdt de grafiek van f in de punten A en B.
De x-coördinaat van A is 1.

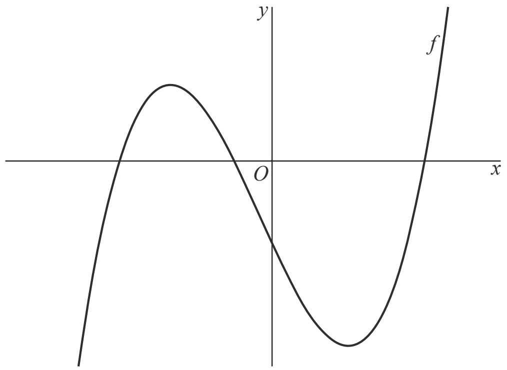
16 Bereken de afstand tussen A en B. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

© ThiemeMeulenhoff

Polynoom

De functie f is gegeven door $f(x) = (x + 1)(x^2 - 16)$. Van een van de twee toppen van de grafiek van f is de x-coördinaat positief. Zie figuur 1.

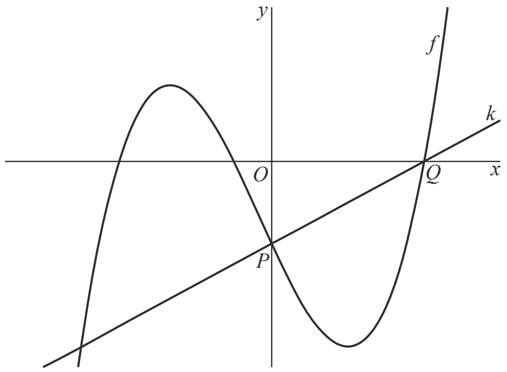
figuur 1



17 Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van deze top.

Punt P is het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. Punt Q is het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as.
Lijn k gaat door de punten P en Q. Zie figuur 2.

figuur 2



18 Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van k.

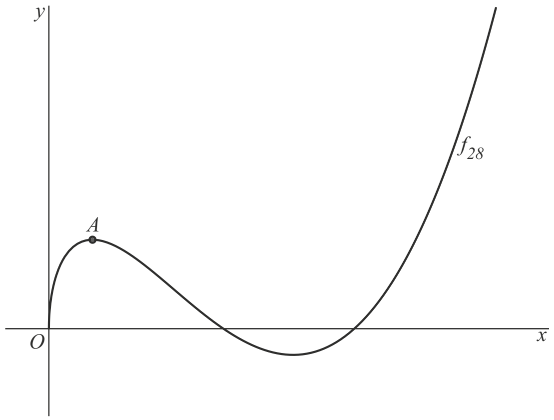
© ThiemeMeulenhoff

Functies met een wortel

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door $f_c(x) = (x^2 - 11x + c)\sqrt{x}$.

In figuur 1 is de grafiek van de functie $f_{28}(x) = (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x}$ getekend.

figuur 1



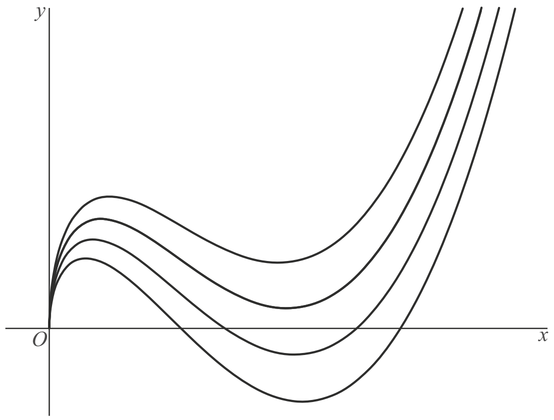
19 Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f_{28} met de x-as.

Op de grafiek van f_{28} ligt punt A. Punt A is een top van de grafiek.
Zie figuur 1.

20 Bereken met behulp van differentiëren de coördinaten van A.

In figuur 2 is voor enkele waarden van c de grafiek van f_c getekend.

figuur 2

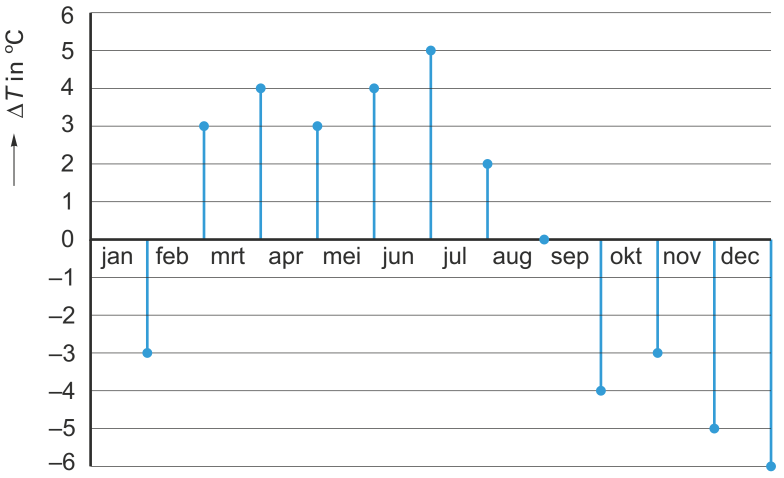


21 Bereken exact voor welke waarde van c de grafiek van f_c de x-as raakt.

© ThiemeMeulenhoff

Temperatuur

Gedurende een kalenderjaar is in een zeker gebied elke maand de gemiddelde dagtemperatuur T bepaald. Met behulp van de meetresultaten is in de figuur het toenamendiagram van T getekend.



22 In welke maand was de verandering van de gemiddelde dagtemperatuur ten opzichte van de voorafgaande maand het grootst?

De gemiddelde dagtemperatuur in mei was 12 °C.

23 Bereken de gemiddelde dagtemperatuur in de maand december.

24 Teken een puntengrafiek van het verloop van de gemiddelde dagtemperatuur per maand van dit jaar.

Derdegraadsfunctie en gebroken functie

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = -x^3 + 4x$ en $g(x) = 1 - \frac{1}{(ax+1)^2}$.

Voor elke waarde van a snijden de grafieken van f en g elkaar in de oorsprong.
Er is een waarde van a zodat in de oorsprong de raaklijnen aan de grafieken van f en g loodrecht op elkaar staan.

25 Bereken exact deze waarde van a.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 5

1 In het raakpunt geldt: $f'(x)$ is gelijk aan de helling van lijn k.

2 Stel een formule op voor de oppervlakte van de rechthoek en bepaal met de afgeleide hiervan het maximum.

3 Schrijf de formule zonder haakjes. Gebruik $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

4 Los a op uit $f_a(5) = 6$.

5 Schrijf f als een machtsfunctie en differentieer deze. Los op $f'(x) = 0$ en bepaal de coördinaten van B.

6 Teken zo goed mogelijk de raaklijn aan de grafiek en lees daarvan de helling af.

7 Analyseer per interval het stijgen of dalen van de grafiek van T. Gebruik ook de gegevens van de vorige vraag.

8 Geen probleem.

9 Als f door de x-as gaat, heeft F een top.

10 Los op $f'(x) = 0$.

11 Eerst verandert W steeds sneller, later steeds minder snel.

12 Voor welke waarde van B is de richtingscoëfficiënt van de lijn door (0, 0) en (100, 100) gelijk aan de afgeleide van I ?

13 Vul $B = 0$ en $B = 100$ in en vereenvoudig de formule.

14 Vul $p = 3$, $I = 17$ en $B = 50$ in de formule in en bereken a.

15 De raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$. Bepaal a met behulp van differentiëren.

16 De punten A en B hebben dezelfde y-coördinaat. De rekenmachine mag gebruikt worden om de x-coördinaat van B te berekenen, maar een algebraïsche oplossing is ook mogelijk.

17 Eerst f zonder haakjes schrijven, dan differentiëren.

18 Bereken de coördinaten van P en Q en met behulp hiervan de richtingscoëfficiënt van k.

19 $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$

20 Schrijf $f(x)$ zonder haakjes met machten van x. De vergelijking $f'(x) = 0$ mag exact of met de rekenmachine worden opgelost.

21 De factor $(x^2 - 11x + c)$ bepaalt hoeveel nulpunten $f_c(x)$ heeft naast $x = 0$.

22 De grootste verandering is de grootste speld (naar boven óf naar beneden).

23 De veranderingen van juni t/m december aflezen uit het toenamediagram.

24 Maak eerst een tabel met de gemiddelde dagtemperatuur per maand.

25 g anders schrijven en differentiëren met de kettingregel. De raaklijnen staan loodrecht op elkaar in de oorsprong als geldt: $f'(0) \cdot g'(0) = -1$.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 5

Wortelfunctie

1 De grafieken van f en k raken elkaar in een punt R. De helling van f in het punt R moet gelijk zijn aan de helling van k dus gelijk aan 2.

$f(x) = \sqrt{4x-5} = (4x-5)^{\frac{1}{2}}$ kan worden gedifferentieerd met de kettingregel:

$f'(x) = \frac{1}{2}(4x-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2(4x-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-5}}$

In punt R geldt: $\frac{2}{\sqrt{4x-5}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4x-5} = 1 \Leftrightarrow 4x-5 = 1 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

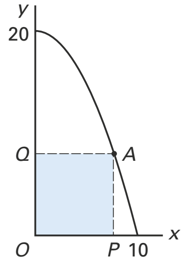
R ligt op de grafiek van f dus $y_R = f(1{,}5) = \sqrt{4 \cdot 1{,}5 - 5} = 1$
Het punt $R(1{,}5;\ 1)$ ligt ook op de grafiek van k dus: $1 = 2 \cdot 1{,}5 + b \Leftrightarrow b = -2$

Rechthoek

2 Als de x-coördinaat van A gelijk is aan a, dan geldt $y_A = -\frac{1}{5}a^2 + 20$.

Van P en Q zijn de coördinaten dan $P(a, 0)$ en $Q(0, -\frac{1}{5}a^2 + 20)$.
Een formule voor de oppervlakte van $OPAQ$ is:

$f(a) = OP \cdot OQ = a \cdot (-\frac{1}{5}a^2 + 20) = -\frac{1}{5}a^3 + 20a$



De oppervlakte is maximaal als $f'(a) = 0$

$f'(a) = -\frac{3}{5}a^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}a^2 = -20 \Leftrightarrow$

$a^2 = \frac{100}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{100}{3}}$ of $a = -\sqrt{\frac{100}{3}} \Leftrightarrow$

$a = \frac{10}{\sqrt{3}}$ of $a = -\frac{10}{\sqrt{3}}$

De negatieve oplossing vervalt omdat $x > 0$.
De maximale oppervlakte is:

$f(\frac{10}{\sqrt{3}}) = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{5}\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + 20\right) = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{1}{5} \cdot \frac{100}{3} + 20) =$

$\frac{10}{\sqrt{3}} \cdot (-\frac{20}{3} + 20) = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 13\frac{1}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot 13\frac{1}{3} =$

$\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{40}{3} = \frac{400\sqrt{3}}{9}$

Andere vorm van een correct antwoord: $44\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Productfuncties

3 Eerst de functie f zonder haakjes schrijven.

$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x} - \sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$

Differentiëren geeft:

$f'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 1\frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$1\frac{1}{2}\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

© ThiemeMeulenhoff

4 $f_a(5) = 6 \Leftrightarrow (5-1) \cdot \sqrt{5-a} = 6 \Leftrightarrow 4\sqrt{5-a} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{5-a} = 1{,}5$
Kwadrateren geeft: $5 - a = 2{,}25 \Leftrightarrow a = 2{,}75$
Controle: $f_{2{,}75}(5) = (5-1) \cdot \sqrt{5-2{,}75} = 4 \cdot 1{,}5 = 6$ dus het antwoord $a = 2{,}75$ voldoet.

Gebroken functie met raaklijn

5 Voor de x-coördinaat van B geldt $f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Uit $f(x) = \frac{1}{x} + 1 = x^{-1} + 1$ volgt $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Dus $f'(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$

Omdat $x > 0$ is de x-coördinaat van punt B gelijk aan $\sqrt{2} \Rightarrow y_B = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

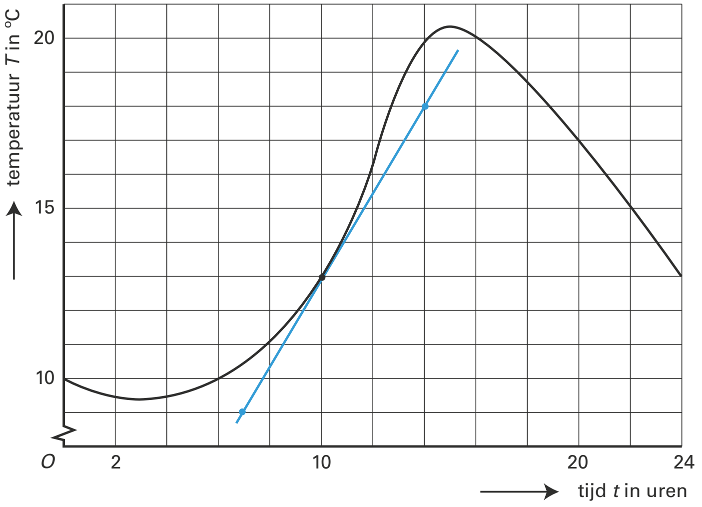
Invullen van $B(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} + 1)$ in raaklijn $y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft $\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + b \Leftrightarrow$

$\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + b \Leftrightarrow b = \sqrt{2} + 1$

Een exacte vergelijking van de raaklijn in punt B is $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{2} + 1$.

Van grafiek naar helling

6 Teken de raaklijn aan de grafiek in het punt behorende bij $t = 10$.



Punten op de raaklijn aflezen geeft bijvoorbeeld: (7, 8) en (14, 18).

De helling van de raaklijn is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18-8}{14-7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$.

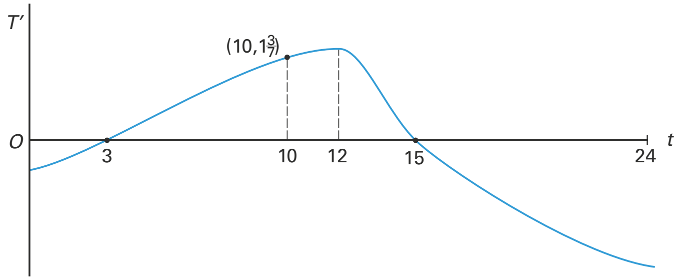
Op $t = 10$ verandert T met snelheid $1\frac{3}{7}$ °C per uur.

Door een iets andere raaklijn te tekenen, kan een afwijkende snelheid gevonden worden.

© ThiemeMeulenhoff

7 Eerst aflezen in de grafiek van T:
- de helling is 0 bij de toppen, dus voor $t \approx 3$ en $t \approx 15$ gaat de hellinggrafiek door de t-as
- tussen $t = 0$ en $t \approx 3$ is de grafiek van T afnemend dalend, dus de helling is negatief en stijgend
- de grafiek van T stijgt het snelst voor $t \approx 12$ dus tussen $t \approx 3$ en $t \approx 12$ is de grafiek van T toenemend stijgend: de helling is dan positief en stijgend
- voor $t \approx 12$ heeft de helling een maximum
- tussen $t \approx 12$ en $t \approx 15$ is de grafiek van T afnemend stijgend: de helling is dan positief en dalend
- tussen $t \approx 15$ en $t = 24$ is de grafiek van T toenemend dalend: de helling is dan negatief en dalend
- uit de vorige vraag volgt dat het punt $(10;\ 1\frac{3}{7})$ op de grafiek van de helling ligt

Dit alles leidt tot de volgende schets van de afgeleide (= helling):

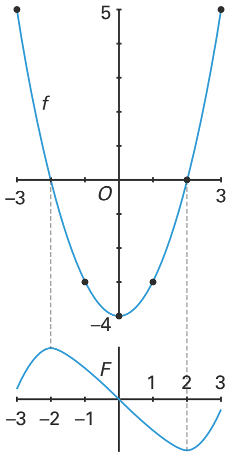


Van helling naar grafiek

8 Een tabel op het gegeven interval:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	–3	–4	–3	0	5

De grafiek van f staat hiernaast.



9
- tussen $x = -3$ en $x = -2$ is f positief dus F stijgt
- bij $x = -2$ gaat f dalend door de x-as, dus F gaat daar over van stijgen naar dalen (F heeft een maximum)
- tussen $x = -2$ en $x = 2$ is f negatief dus F daalt
- bij x is 0 heeft f een minimum dus F daalt daar het snelst
- bij $x = 2$ gaat f stijgend door de x-as, dus F gaat daar over van dalen naar stijgen (F heeft een minimum)
- tussen $x = 2$ en $x = 3$ is f positief dus F stijgt
- $F(0) = 0$ dus de grafiek van F gaat door (0, 0)

Dit alles leidt tot de schets van F hiernaast.
De verticale as heeft geen schaal omdat niet veel bekend is.
Een aanpak buiten de bedoeling van deze vraag.
Het is niet moeilijk om een formule bij F te bedenken:
elke functie van de vorm $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + c$ *heeft*
voor elke waarde van c de functie $f(x) = x^2 - 4$ *als afgeleide.*
Omdat F(0) = 0 moet c ook 0 zijn, dus $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.
Hiermee ligt F wel geheel vast.

© ThiemeMeulenhoff

Top

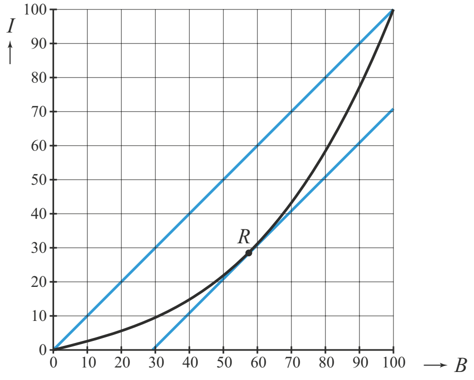
10 $f(x) = x^2 - px \Rightarrow f'(x) = 2x - p$
De parabool die bij f hoort heeft een top als $f'(x) = 2x - p = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}p$.
$f(\frac{1}{2}p) = (\frac{1}{2}p)^2 - p \cdot \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 = -\frac{1}{4}p^2$
De coördinaten van de top zijn $(\frac{1}{2}p,\ -\frac{1}{4}p^2)$.

Bal uit water

11 Als de bal net het water in gaat, verandert W niet zo snel, maar als de bal half in het water is, verandert W sneller vanwege de grotere doorsnede van de bal in het midden. Als de bal bijna geheel onder water is, verandert W niet zo snel.
Diagram B past het best hierbij.

Inkomensverdeling

12 Teken het lijnstuk dat (0, 0) verbindt met (100, 100) en verschuif dit lijnstuk evenwijdig aan zichzelf tot het de grafiek van de lorenzcurve raakt in een punt R.



De x-coördinaat van dit punt R moet berekend worden.
Differentiëren geeft: $I' = 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}000075B^2 = 0{,}25 + 0{,}000225B^2$
De helling van het lijnstuk dat (0, 0) verbindt met (100, 100) is 1, dus de helling van de lorenzcurve in punt R moet ook 1 zijn: $I' = 0{,}25 + 0{,}000225B^2 = 1 \Leftrightarrow$
$0{,}000225B^2 = 0{,}75 \Leftrightarrow B^2 = \frac{0{,}75}{0{,}000225} \Leftrightarrow B = \sqrt{\frac{0{,}75}{0{,}000225}} = 57{,}735... \approx 58 \Rightarrow$
het percentage van de bevolking met een bovengemiddeld inkomen is 100 – 58 = 42%.

13 Invullen van $B = 0$ geeft: $I = a \cdot 0 + 100^{1-p} \cdot (1 - a) \cdot 0^p = 0$ dus de grafiek van I gaat voor alle waarden van a en p door het punt (0, 0).
Invullen van $B = 100$ geeft: $I = a \cdot 100 + 100^{1-p} \cdot (1 - a) \cdot 100^p =$
$a \cdot 100 + 100^{1-p+p} \cdot (1 - a) = a \cdot 100 + 100 \cdot (1 - a) = 100a + 100 - 100a = 100$ dus de grafiek van I gaat voor alle waarden van a en p door het punt (100, 100).

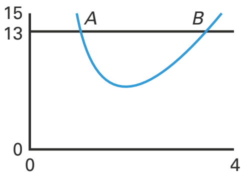
14 Voor $p = 3$ geldt de lorenzcurve: $I = a \cdot B + 100^{1-3} \cdot (1 - a) \cdot B^3$
Volgens de gegevens hoort $I = 17$ bij $B = 50$ dus:
$17 = a \cdot 50 + 100^{-2} \cdot (1 - a) \cdot 50^3 \Leftrightarrow 17 = 50a + 12{,}5 \cdot (1 - a) \Leftrightarrow 17 = 50a + 12{,}5 - 12{,}5a \Leftrightarrow$
$4{,}5 = 37{,}5a \Leftrightarrow a = \frac{4{,}5}{37{,}5} = 0{,}12$

© ThiemeMeulenhoff

Grafiek

15 De raaklijn heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.
Differentiëren: $f(x) = x^2 + 12x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 2x - 24x^{-3}$
De raaklijn in punt (2, 7) heeft helling $a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 24 \cdot 2^{-3} = 4 - 24 \cdot \frac{1}{8} = 4 - 3 = 1$.
De coördinaten van (2, 7) invullen in $y = 1 \cdot x + b$ geeft $7 = 2 + b \Leftrightarrow b = 5$.
De vergelijking van de raaklijn is $y = x + 5$.

16 $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 + 12 \cdot 1^{-2} = 13$ dus de y-coördinaat van zowel A als B is 13.



Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = x^2 + 12x^{-2}$ en $y_2 = 13$ en bepaal met behulp van *intersect* de x-coördinaat van het snijpunt dat bij punt B hoort. Dit geeft $x \approx 3{,}46$.
De afstand tussen A en B is ongeveer 2,46.
andere manier
De vergelijking $x^2 + 12x^{-2} = 13$ kan ook algebraïsch worden opgelost door linker- en rechterlid met x^2 te vermenigvuldigen. Dit mag omdat gegeven is dat $x > 0$.
$x^2 + 12x^{-2} = 13 \Leftrightarrow x^4 + 12 = 13x^2 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 12 = 0$ *(substitutie $u = x^2$)*
$u^2 - 13u + 12 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u-12) = 0 \Leftrightarrow u = 1$ of $u = 12 \Leftrightarrow x^2 = 1$ of $x^2 = 12 \Leftrightarrow$
$x = 1$ of $x = -1$ of $x = \sqrt{12}$ of $x = -\sqrt{12}$
De negatieve oplossingen vervallen vanwege de voorwaarde $x > 0$. De oplossing $x = 1$ hoort bij punt A dus de x-coördinaat van punt B is $\sqrt{12}$, afgerond 3,46.
De afstand tussen A en B is $\sqrt{12} - 1 \approx 2{,}46$.

Polynoom

17 In elk van beide toppen geldt: $f'(x) = 0$
Eerst f zonder haakjes schrijven, dan differentiëren.
$f(x) = (x+1)(x^2 - 16) = x^3 + x^2 - 16x - 16 \Rightarrow$
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$
dus $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0$
De *abc*-formule met $a = 3$, $b = 2$ en $c = -16$ geeft:
$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -16}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6}$
De gezochte x is positief dus $x = \frac{-2 + 14}{6} = 2$.
$x = 2$ invullen geeft $f(2) = (2 + 1)(2^2 - 16) = -36$ dus de top is (2, –36).
andere manier
De vergelijking $3x^2 + 2x - 16 = 0$ kan ook door ontbinden in factoren worden opgelost: $3x^2 + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow (3x + 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2\frac{2}{3}$ of $x = 2$
Verder zoals hierboven.

18 De nulpunten van f volgen uit: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ of $x^2 = 16 \Leftrightarrow$
$x = -1$ of $x = 4$ of $x = -4$ dus het punt Q is (4, 0).
$x = 0$ invullen geeft $f(0) = (0 + 1)(0^2 - 16) = -16$ dus punt P is (0, –16).
De richtingscoëfficiënt van de lijn k is dan $\frac{16}{4} = 4 \Rightarrow$
een vergelijking van de lijn k is: $y = 4x - 16$

Functies met een wortel

19 $f_{28}(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0$ of $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$
$(x-4)(x-7) = 0$ of $x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = 7$ of $x = 0$

20 In punt A geldt dat de afgeleide gelijk is aan 0.
Eerst $f_{28}(x)$ herschrijven:
$f_{28}(x) = (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = (x^2 - 11x + 28) \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}} - 11x^{1\frac{1}{2}} + 28x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$
$f'_{28}(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 16\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 14x^{-\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}}$
Dus $f'_{28}(x) = 0$ als $2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}} = 0$
Deze vergelijking mag met de rekenmachine worden opgelost, maar hier volgt een algebraïsche oplossing.
$2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}} = 0$ links en rechts vermenigvuldigen met $2\sqrt{x}$ (dat mag als $x > 0$; voor $x = 0$ bestaat de afgeleide echter niet) geeft: $5x^2 - 33x + 28 = 0$
Deze laatste vergelijking oplossen met de *abc*-formule:
Discriminant $= (-33)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 28 = 529 \Rightarrow$
$x = \frac{-(-33) \pm \sqrt{529}}{10} = \frac{33 \pm 23}{10} \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 5{,}6$
Bij punt A hoort $x = 1$ (en $x = 5{,}6$ hoort bij het minimum).
$f(1) = (1^2 - 11 \cdot 1 + 28)\sqrt{1} = 18$ dus de coördinaten van A zijn (1, 18).

21 De nulpunten van $f_c(x)$ volgen uit: $(x^2 - 11x + c)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 11x + c = 0$ of $x = 0$
De grafiek van $f_c(x)$ raakt de x-as als $x^2 - 11x + c = 0$ precies 1 oplossing geeft, dus als de discriminant 0 is.
Discriminant $= (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \Leftrightarrow 121 - 4c = 0 \Leftrightarrow c = 30{,}25$

Temperatuur

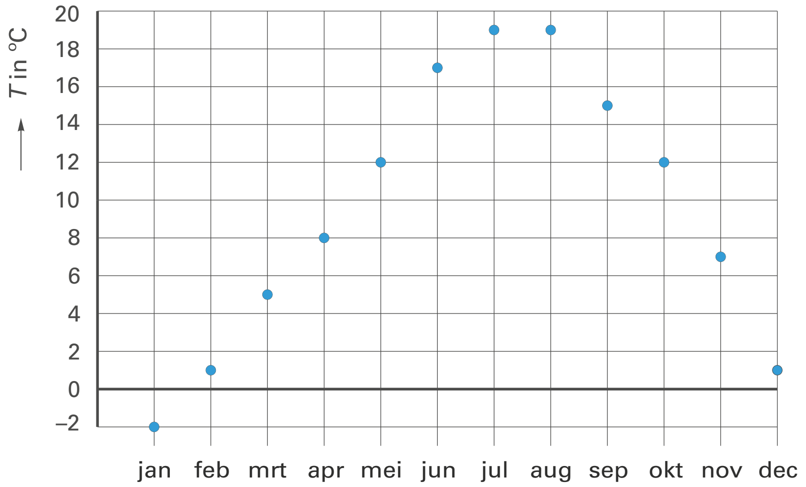
22 In december daalde de gemiddelde dagtemperatuur 6 graden vergeleken met die in november. Dat is de grootste verandering in dit jaar.

23 In mei was de gemiddelde dagtemperatuur 12 °C. De toenamen van juni t/m december moeten hier bij worden geteld. Dit geeft voor december een gemiddelde dagtemperatuur 12 + 5 + 2 + 0 – 4 – 3 – 5 – 6° = 1 °C.

24 Eerst een tabel maken van de gemiddelde dagtemperatuur per maand:

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
T (°C)	–2	1	5	8	12	17	19	19	15	12	7	1

Uit de figuur in de opgave volgt ook nog de gemiddelde decembertemperatuur van het voorgaande jaar, namelijk 1 °C.



Derdegraadsfunctie en gebroken functie

25 $f(x) = x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 4$

g differentiëren met de kettingregel:

$g(x) = 1 - \frac{1}{(ax+1)^2} = 1 - (ax+1)^{-2} \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (ax+1)^{-3} \cdot a = \frac{2a}{(ax+1)^3}$

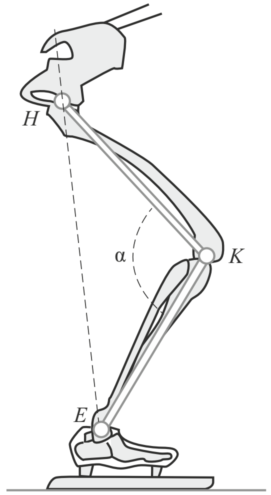
De raaklijnen staan loodrecht op elkaar in de oorsprong als geldt: $f'(0) \cdot g'(0) = -1 \Leftrightarrow$

$(-3 \cdot 0^2 + 4) \cdot \left(\frac{2a}{(a \cdot 0 + 1)^3}\right) = -1 \Leftrightarrow 4 \cdot 2a = -1 \Leftrightarrow 8a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$

6 Berekeningen in de meetkunde

Schaatshouding

Omdat de houding die een schaatser aanneemt van invloed is op zijn snelheid, is deze zogeheten schaatshouding onderzocht.
Hierbij is gekeken naar de driehoek die wordt gevormd door het heupgewricht H, het kniegewricht K en het enkelgewricht E.
De hoek in graden tussen het dijbeen (HK) en het scheenbeen (KE) is de kniehoek α. Zie de figuur.



We bekijken eerst een schaatser met een dijbeenlengte van 48 cm en een scheenbeenlengte van 42 cm.

Op een bepaald moment geldt voor deze schaatser: $HE = 69$ cm en $\alpha = 100°$.

1 Bereken $\angle HEK$ in graden nauwkeurig.

Op het moment van de afzet geldt voor deze schaatser: $HE = 88$ cm.

2 Bereken de kniehoek α op het moment van de afzet. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

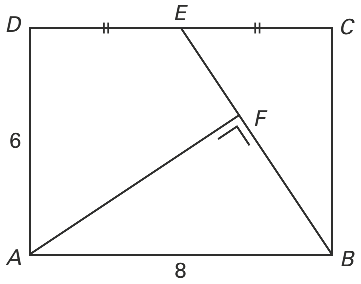
De snelheid waarmee HE verandert, bepaalt mede de snelheid van de schaatser. Bij het schaatsen op een schaats met vaste ijzers kan het been bij de afzet niet volledig gestrekt worden.
Bij het schaatsen op een klapschaats is het wel mogelijk het been bij de afzet geheel te strekken.
Hierbij neemt de kniehoek in 0,70 seconden toe van 100° tot 180°.

Voor een bepaalde schaatser op klapschaatsen geldt: $HE = \sqrt{3625 - 3600\cos(\alpha)}$
Hierbij is α in graden en HE in cm.

3 Bereken de gemiddelde snelheid waarmee bij deze schaatser op klapschaatsen HE verandert als α toeneemt van 100° tot 180°. Geef je antwoord in een geheel aantal cm per seconde.

Rechthoek *ABCD*

Gegeven is een rechthoek *ABCD*. Zie figuur.
De lengte van zijde *AB* is 8 en zijde *AD* heeft lengte 6.
E is het midden van zijde *CD*.
F is een punt op lijnstuk *BE* zó dat lijnstuk *AF* loodrecht staat op lijnstuk *BE*.

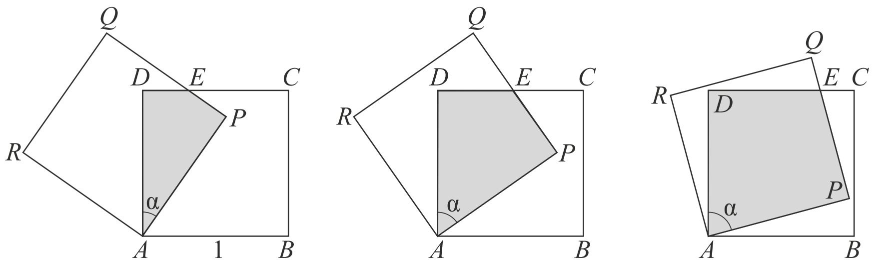


4 Bereken exact de lengte van lijnstuk *AF*.

Lijnstuk *AF* wordt aan de kant van *F* verlengd tot zijde *BC* wordt gesneden in punt *G*.
5 Bereken exact de verhouding waarin zijde *BC* door punt *G* wordt verdeeld.

Scharnierende vierkanten

Twee vierkanten *ABCD* en *APQR* hebben zijde 1. Vierkant *APQR* kan scharnieren om punt *A* en schuift daarbij deels over vierkant *ABCD*. Zo ontstaat een overlapping *APED*. Zie de figuur.



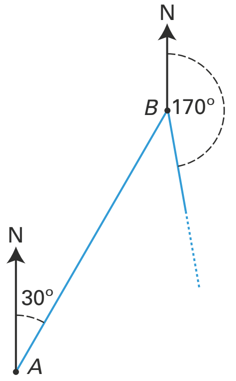
Hoek *DAP* wordt α genoemd. Er geldt $0° < \alpha < 90°$. Punt *E* is het snijpunt van lijnstuk *CD* en lijnstuk *PQ*. De overlapping *APED* is symmetrisch in lijnstuk *AE*.
6 Bereken de oppervlakte van *APED* in het geval dat $\alpha = 50°$. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Voor een bepaalde waarde van α is de lengte van lijnstuk *BP* gelijk aan 0,6.
7 Bereken deze waarde van α in hele graden nauwkeurig.

© ThiemeMeulenhoff

Noodlanding

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld *A* en vliegt drie uur met een constante snelheid van 140 km/h een koers van 30° ten opzichte van het Noorden.
Daarna verandert hij bij *B* zijn koers in 170° ten opzichte van het Noorden en zijn snelheid in 120 km/h.



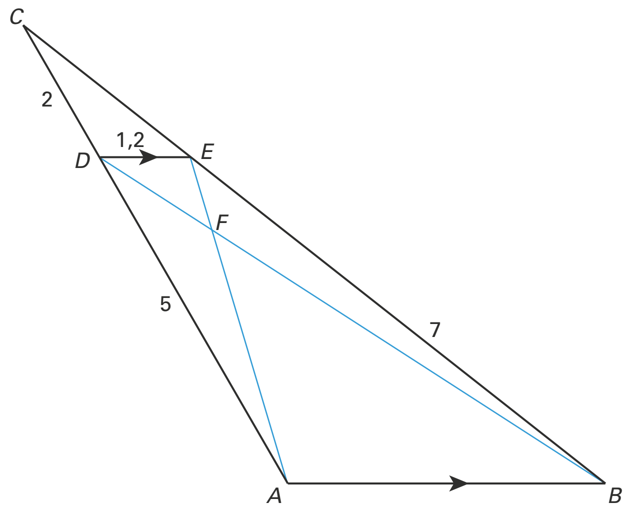
Anderhalf uur na zijn koerswijziging moet hij een noodlanding maken.
Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld *A* door waar hij is geland en dat hij gewond is.
Onmiddellijk wordt vanaf vliegveld *A* een reddingshelikopter gestuurd die rechtstreeks naar hem toevliegt.

8 Bereken de afstand en de koers ten opzichte van het Noorden die de helikopter moet vliegen. Rond zowel afstand als de koers af op één decimaal.

© ThiemeMeulenhoff

Driehoeken

Gegeven is een driehoek *ABC*. Zie figuur.



Punt *D* ligt op zijde *AC* en punt *E* ligt op zijde *BC*.
DE en *AB* zijn evenwijdig.
De lengte van zijde *AD* is 5, *CD* is 2, *DE* is 1,2 en *BE* is 7.

9 Bereken de lengte van lijnstuk *AB*.

10 Bereken hoek *C* in één decimaal nauwkeurig.

F is het snijpunt van *AE* en *BD*.

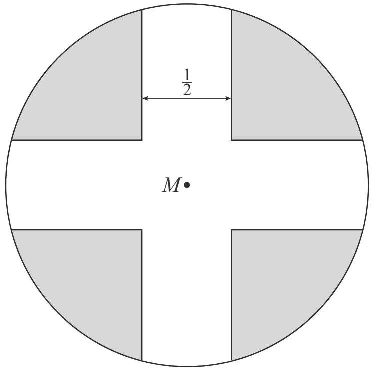
11 Bereken de verhouding van de lengtes van *AF* en *EF*.

© ThiemeMeulenhoff

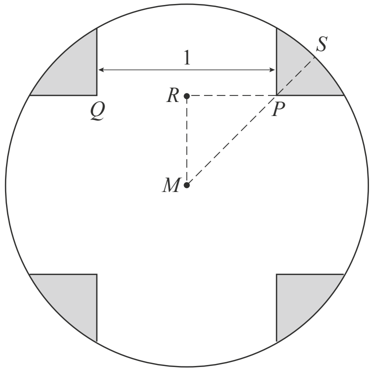
Kruis in cirkel

Gegeven is een cirkel met middelpunt *M* en straal 1. In deze cirkel is een kruis met vier even brede en even lange armen aangebracht. In de onderstaande figuren is dit kruis wit en zijn de vier vlakdelen die buiten het kruis en binnen de cirkel liggen grijs gemaakt. In figuur 1 is voor de breedte van de armen $\frac{1}{2}$ genomen en in figuur 2 is deze breedte 1. In figuur 2 is te zien welke punten *P*, *Q* en *S* genoemd worden. Het punt *R* is het midden van *PQ*.

figuur 1

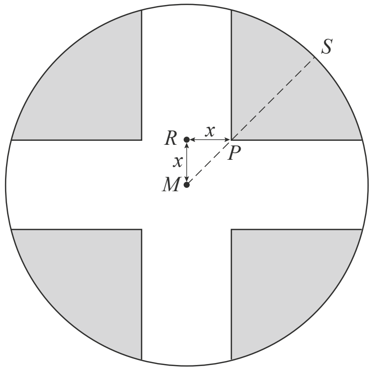


figuur 2



De breedte van de armen van het kruis kan variëren. Hierdoor varieert ook de plaats van de punten *P* en *R*. Als voor de breedte van de armen van het kruis 2*x* genomen wordt, betekent dit dat *MR* = *RP* = *x*. Zie figuur 3.

figuur 3



Er geldt $PS = 1 - x\sqrt{2}$.

12 Toon dit aan.

Als de breedte van de armen van het kruis toeneemt, komt het punt *P* dichter bij punt *S* te liggen. Er is een waarde van *x* waarvoor geldt $PS = 2 \cdot MP$.

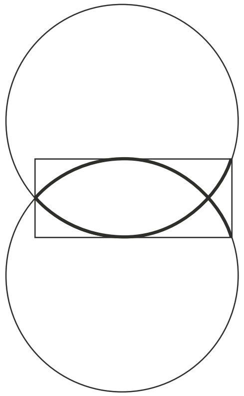
13 Bereken exact deze waarde van *x*.

© ThiemeMeulenhoff

Bumpersticker

In het verkeer zie je regelmatig auto's met bumperstickers. Een veel voorkomende sticker is er een in de vorm van een visje zoals te zien is op de foto. Dit visje is opgebouwd uit twee even grote cirkelbogen die in een gemeenschappelijk punt beginnen en elkaar in een tweede punt snijden. Zie figuur 1. Ook is in deze figuur te zien dat het visje precies wordt omsloten door een rechthoek.

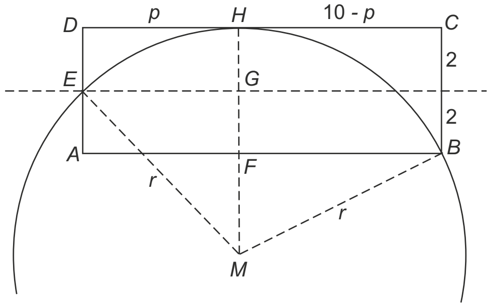
figuur 1



In deze opgave wordt nagegaan hoe een visje getekend kan worden dat in een rechthoek past met een breedte van 10 cm en een hoogte van 4 cm. Om het visje te kunnen tekenen, is het nodig te weten wat de straal is van de bijbehorende cirkelbogen. Ook moet de positie van de middelpunten van de cirkelbogen ten opzichte van de rechthoek bekend zijn.

In figuur 2 zijn de rechthoek en een deel van de onderste cirkel getekend. Er geldt het volgende:

figuur 2



Met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek *MGE* kan een vergelijking worden opgesteld. Deze vergelijking kan vervolgens worden omgewerkt tot:

$r = \frac{1}{4}p^2 + 1$ (1)

14 Stel de gevraagde vergelijking op en werk deze om tot $r = \frac{1}{4}p^2 + 1$.

Op soortgelijke manier kan met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek *MBF* een vergelijking worden opgesteld. Deze vergelijking kan vervolgens worden omgewerkt tot:

$p^2 - 20p + 116 - 8r = 0$ (2)

De in vergelijking (1) gegeven uitdrukking voor r kan in vergelijking (2) worden gesubstitueerd. Hierdoor ontstaat een vergelijking die kan worden omgewerkt tot:

$p^2 + 20p - 108 = 0$ (3)

15 Voer de hierboven beschreven substitutie uit en werk de daarbij verkregen vergelijking om tot $p^2 + 20p - 108 = 0$.

16 Bereken de waarden van p en r in millimeters nauwkeurig.

Hints bij hoofdstuk 6

1 Sinusregel. Cosinusregel kan ook.

2 Cosinusregel.

3 Bereken de lengte van HE bij een kniehoek van 100° en van 180°.

4 Bereken BE met Pythagoras. Zoek gelijkvormige driehoeken.

5 Zoek gelijkvormige driehoeken.

6 Teken hulplijn AE.

7 Cosinusregel in ΔABP.
Een andere aanpak maakt gebruik van de gelijkbenigheid van ΔBAP.

8 Noem de plaats van de noodlanding C. Bereken de lengte van AB en BC.
Bereken een hoek in ΔABC en daarna cosinus- en sinusregel.

9 Toon aan dat gelijkvormig ΔCDE en ΔCAB zijn.

10 Eerst CE berekenen. Vervolgens de cosinusregel.

11 Maak gebruik van gelijkvormige driehoeken.

12 Stelling van Pythagoras.

13 Ga na dat $3 \cdot MP = 1$. Gebruik het resultaat van de vorige vraag.

14 Maak met de stelling van Pythagoras de gevraagde vergelijking.
Werk de haakjes weg en maak r vrij.

15 Let na substitutie op het minteken en de haakjes.

16 Bereken eerst p met de abc-formule (één van beide oplossingen vervalt) en daarna r.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 6

Schaatshouding

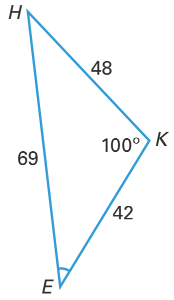
1 *Rekenmachine instellen op graden.*
Sinusregel in ΔHEK:

$$\frac{HK}{\sin(\angle HEK)} = \frac{HE}{\sin(\angle HKE)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{48}{\sin(\angle HEK)} = \frac{69}{\sin(100°)} \Leftrightarrow$$

$$\sin(\angle HEK) = \frac{48 \cdot \sin(100°)}{69} = 0{,}685...$$

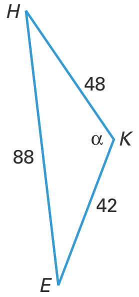
dus $\angle HEK = 43{,}24...°$
Afgerond op hele graden 43°.



2 Cosinusregel in ΔHEK:

$$HE^2 = HK^2 + KE^2 - 2 \cdot HK \cdot KE \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$88^2 = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$7744 = 2304 + 1764 - 4032 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$3676 = -4032 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\cos(\alpha) = \frac{3676}{-4032} = -0{,}9117... \Rightarrow \alpha = 155{,}74...°$$

dus afgerond is de kniehoek α dan 156°.



3 Als $\alpha = 100°$ dan is $HE = \sqrt{3625 - 3600\cos(100°)} = 65{,}19...$ cm.

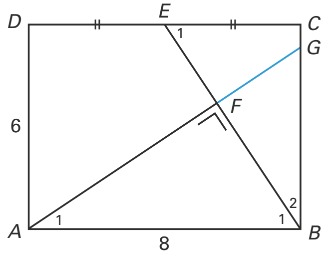
Als $\alpha = 180°$ dan is $HE = \sqrt{3625 - 3600\cos(180°)} = 85$ cm.
In 0,70 seconden verandert de lengte van HE met $85 - 65{,}19... = 19{,}80...$ cm.

Dat is met een gemiddelde snelheid van $\frac{19{,}80...}{0{,}70} = 28{,}29...$ cm/s.

Afgerond is de gemiddelde snelheid waarmee HE verandert 28 cm per seconde.

Rechthoek *ABCD*

4 $DC = 8 \Rightarrow EC = 4$.



Pythagoras in ΔBCE:
$BC^2 + EC^2 = BE^2 \Leftrightarrow 6^2 + 4^2 = BE^2 \Leftrightarrow BE = \sqrt{52} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.
$ABCD$ is een rechthoek dus $\angle C = 90°$ en $\angle E_1 = \angle B_1$ (Z-hoeken).
Dan zijn ΔBCE en ΔAFB gelijkvormig, want (1) $\angle C = \angle F = 90°$ en (2) $\angle E_1 = \angle B_1$.
Uit de gelijkvormigheid volgt:

$$\frac{BC}{AF} = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow \frac{6}{AF} = \frac{2\sqrt{13}}{8} \Rightarrow AF = \frac{6 \cdot 8}{2\sqrt{13}} = \frac{24}{\sqrt{13}} \text{ (of } \frac{24}{13}\sqrt{13}\text{)}.$$

De exacte lengte van AF is $\frac{24}{13}\sqrt{13}$.

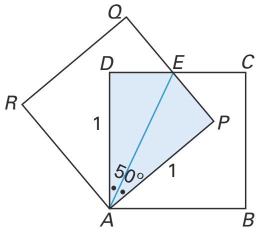
5 $\angle B_1 + \angle B_2 = 90°$ (rechthoek) en $\angle B_1 + \angle A_1 = 180° - 90° = 90°$ (hoekensom ΔABF) dus $\angle B_2 = \angle A_1$.
Dan zijn ΔABG en ΔBCE gelijkvormig, want (1) $\angle B_{12} = \angle C = 90°$ en (2) $\angle A_1 = \angle B_2$.
Uit de gelijkvormigheid volgt:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BG}{CE} \Leftrightarrow \frac{8}{6} = \frac{BG}{4} \Rightarrow BG = \frac{4 \cdot 8}{6} = 5\frac{1}{3} \Rightarrow GC = 6 - 5\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

De gevraagde verhouding is $BG : GC = 5\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 16 : 2 = 8 : 1$.

Scharnierende vierkanten

6 *Rekenmachine instellen op graden.*
Vanwege symmetrie wordt *APED* door lijn *AE* in twee gelijke driehoeken verdeeld.



In ΔADE: $\tan(\angle DAE) = \frac{DE}{DA} \Leftrightarrow \tan(25°) = \frac{DE}{1} \Leftrightarrow DE = \tan(25°)$

Opp $\Delta ADE = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \tan(25°) \cdot 1 = \frac{1}{2}\tan(25°)$

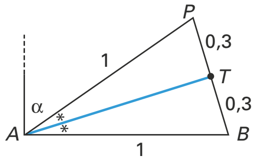
Opp $APED = 2 \cdot \frac{1}{2}\tan(25°) = \tan(25°)$

Afgerond op twee decimalen: Opp $APED \approx 0{,}47$.

7 Cosinusregel in ΔABP:
$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos(\angle BAP) \Leftrightarrow$
$0{,}6^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\angle BAP) \Leftrightarrow$
$0{,}36 = 2 - 2 \cdot \cos(\angle BAP) \Leftrightarrow$
$-2 \cdot \cos(\angle BAP) = -1{,}64 \Leftrightarrow$

$\cos(\angle BAP) = \frac{-1{,}64}{-2} = 0{,}82 \Rightarrow \angle BAP = 34{,}9...°$

dus $\alpha = 90° - 34{,}9...° \approx 55°$
andere manier
ΔABP is gelijkbenig. Verbind *A* met het midden *T* van *PB* dus $\angle ATB = \angle ATP = 90°$.

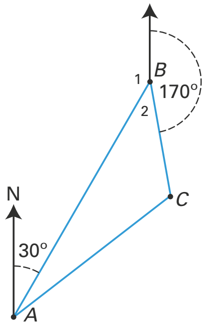


$BT = PT = 0{,}3$.

$\sin(\angle BAT) = \frac{0{,}3}{1} = 0{,}3 \Rightarrow \angle BAT = 17{,}4...° \Rightarrow \angle BAP = 2 \cdot 17{,}4...° = 34{,}9...°$

dus $\alpha = 90° - 34{,}9...° \approx 55°$

Noodlanding



8 Eerst drie uur vliegen met 140 km/h dus $AB = 420$ km.
Noem de plaats van de noodlanding *C*.
Anderhalf uur vliegen met 120 km/h dus $BC = 180$ km.
De pijltjes van Noord zijn natuurlijk evenwijdig dus
$\angle B_1 = 180° - 30° = 150° \Rightarrow \angle B_2 = 360° - 170° - 150° = 40°$.
Cosinusregel in ΔABC:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B_2) \Leftrightarrow$
$AC^2 = 420^2 + 180^2 - 2 \cdot 420 \cdot 180 \cdot \cos(40°) = 92\,974{,}08... \Rightarrow$
$AC = \sqrt{92\,974{,}08...} = 304{,}91...$
Sinusregel in ΔABC:

$$\frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \frac{AC}{\sin(\angle B_2)} \Leftrightarrow \frac{180}{\sin(\angle BAC)} = \frac{304{,}9...}{\sin(40°)} \Leftrightarrow$$

$\sin(\angle BAC) = \frac{180 \cdot \sin(40°)}{304{,}9...} = 0{,}379 \Rightarrow \angle BAC = 22{,}29...° \Rightarrow$

de koers van *A* naar *C* is $30° + 22{,}29...° = 52{,}29...°$.
De helikopter moet ongeveer 304,9 km vliegen met een koers van 52,3° ten opzichte van het Noorden.

Driehoeken

9 ΔCDE en ΔCAB zijn gelijkvormig want: (1) $\angle CDE = \angle CAB$ (F-hoeken) en (2) $\angle C = \angle C$.
Hieruit volgt de volgende verhoudingstabel:

2	1,2	*CE*
7	*AB*	7 + *CE*

Kruislings vermenigvuldigen van de eerste twee kolommen geeft:

$AB = \frac{7 \cdot 1{,}2}{2} \Rightarrow AB = 4{,}2$.

10 Uit dezelfde verhoudingstabel volgt:
$7 \cdot CE = 2 \cdot (7 + CE) \Leftrightarrow 7 \cdot CE = 14 + 2 \cdot CE \Leftrightarrow 5 \cdot CE = 14 \Leftrightarrow CE = 2{,}8$
Cosinusregel in ΔCDE:
$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2 \cdot CD \cdot CE \cdot \cos(\angle C) \Leftrightarrow$
$1{,}2^2 = 2^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2{,}8 \cdot \cos(\angle C) \Leftrightarrow$
$1{,}44 = 4 + 7{,}84 - 11{,}2 \cdot \cos(\angle C) \Leftrightarrow$
$1{,}44 = 11{,}84 - 11{,}2 \cdot \cos(\angle C) \Leftrightarrow$
$-10{,}4 = -11{,}2 \cos(\angle C) \Leftrightarrow$

$\cos(\angle C) = \frac{-10{,}4}{-11{,}2} = 0{,}928... \Rightarrow \angle C = 21{,}786...°$

Afgerond op één decimaal: $\angle C \approx 21{,}8°$.

11 ΔDEF en ΔBAF zijn gelijkvormig want: (1) $\angle DEF = \angle BAF$ (Z-hoeken) en (2) $\angle EFD = \angle AFB$ (overstaande hoeken).
Hieruit volgt de volgende verhoudingstabel:

1,2	*EF*	*DF*
4,2	*AF*	*BF*

Uit de eerste twee kolommen volgt:
$AF : EF = 4{,}2 : 1{,}2 = 42 : 12 = 7 : 2$.
De gevraagde verhouding is 7 : 2.

Kruis in cirkel

12 $MP = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{2} \cdot x = x\sqrt{2} \;\Rightarrow\; PS = MS - MP = 1 - x\sqrt{2}$

Let op: $\sqrt{x^2} = x$ *geldt alleen als* $x \geq 0$.

13 $PS = 2 \cdot MP$ en $MP + PS = 1$ dus $3 \cdot MP = 1 \;\Rightarrow\; MP = \frac{1}{3}$ en $PS = \frac{2}{3}$

Uit $MP = \frac{1}{3}$ volgt $x\sqrt{2} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{6}\sqrt{2}$

Bumpersticker

14 Volgens de stelling van Pythagoras in ΔMGE geldt: $MG^2 + GE^2 = ME^2 \;\Leftrightarrow$
$(r-2)^2 + p^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; r^2 - 4r + 4 + p^2 = r^2 \;\Leftrightarrow\; -4r + 4 + p^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4r = 4 + p^2 \;\Leftrightarrow$
$r = 1 + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 + 1$

15 $r = \frac{1}{4}p^2 + 1$ substitueren in $p^2 - 20p + 116 - 8r = 0$ geeft
$p^2 - 20p + 116 - 8\left(\frac{1}{4}p^2 + 1\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 - 20p + 116 - 2p^2 - 8 = 0 \;\Leftrightarrow$
$-p^2 - 20p + 108 = 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 + 20p - 108 = 0$

16 $p^2 + 20p - 108 = 0$ met de *abc*-formule oplossen.
$a = 1$, $b = 20$ en $c = -108$ geeft:

$$p = \frac{-20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-108)}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm \sqrt{832}}{2} \text{ dus } p = 4{,}42...$$

(de oplossing $p = -24{,}42...$ vervalt omdat p positief moet zijn).

Hieruit volgt: $r = \frac{1}{4}p^2 + 1 = \frac{1}{4} \cdot (4{,}42...)^2 + 1 = 5{,}88...$

Afgerond op millimeters: $p = 4{,}4$ cm (of 44 mm) en $r = 5{,}9$ cm (of 59 mm).

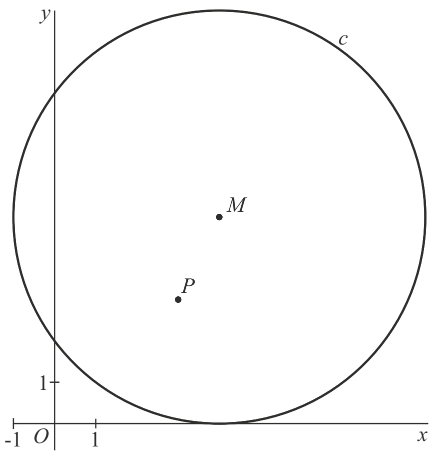
© ThiemeMeulenhoff

7 Cirkels en lijnen

Een punt binnen een cirkel

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$ en het punt $P(3, 3)$.
M is het middelpunt van c. Zie figuur 1.

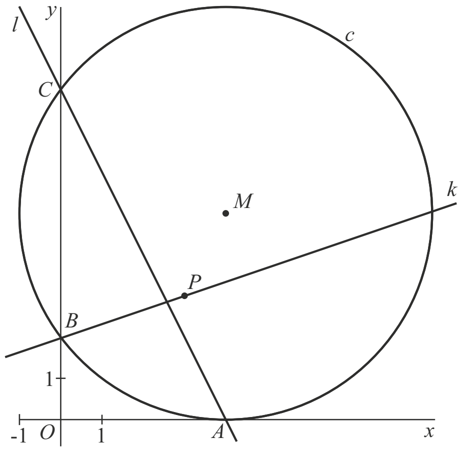
figuur 1



1 Bereken de exacte afstand van punt P tot cirkel c.

Cirkel c raakt de x-as in het punt A en snijdt de y-as in de punten B en C, waarbij C boven B ligt.
Lijn k gaat door B en P en lijn l gaat door A en C. Zie figuur 2.

figuur 2

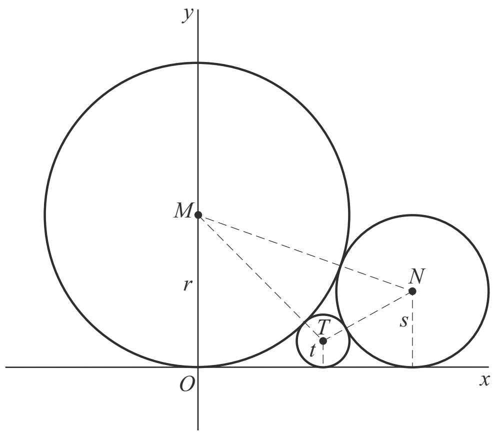


2 Bereken in graden nauwkeurig de scherpe hoek waaronder k en l elkaar snijden.

© ThiemeMeulenhoff

Drie cirkels

In de figuur zijn in een assenstelsel drie cirkels getekend.
De cirkels raken elkaar en bovendien raken ze alle drie de x-as.
De linker cirkel heeft middelpunt M en straal r. Punt M ligt op de y-as.
De middelste cirkel heeft middelpunt T en straal t. De rechter cirkel heeft middelpunt N en straal s.
Verder is $r \geq s > t$.



De vragen 3 en 4 hebben betrekking op de situatie waarin geldt: $r = 9$, $s = 2\frac{1}{4}$ en $t = 1$.

3 Bereken $\angle MTN$. Geef je antwoord in een geheel aantal graden.

4 Stel een vergelijking op van de lijn door M en T.

Voor de stralen van de drie cirkels geldt: $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{s}}$

De vragen 5 en 6 hebben betrekking op de situatie waarin $r = s = 2$.

In deze situatie geldt: $t = \frac{1}{2}$

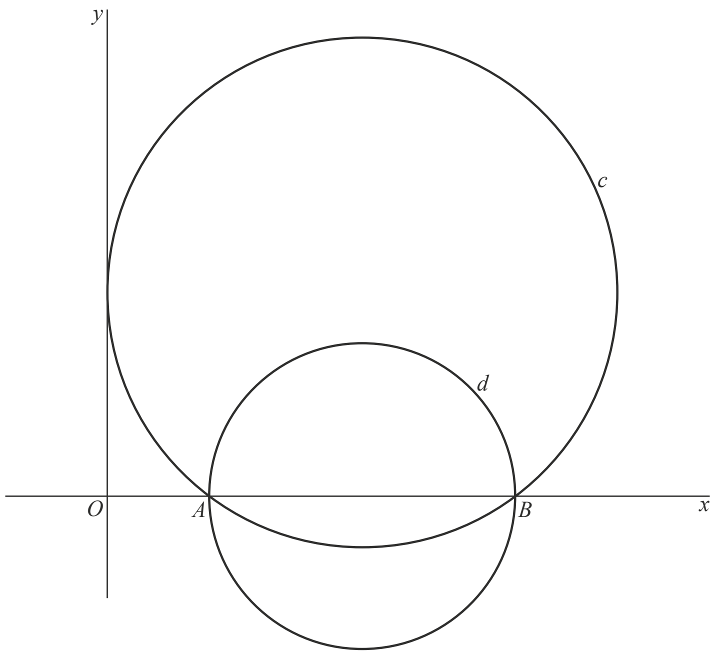
5 Toon aan dat in deze situatie inderdaad geldt: $t = \frac{1}{2}$.

6 Bereken de oppervlakte van driehoek MNT.

© ThiemeMeulenhoff

Twee cirkels

Gegeven zijn de punten $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$, de cirkel c met vergelijking $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 16 = 0$ en de cirkel d met middellijn AB. Zie de figuur.



7 Toon aan dat de cirkel c door de punten A en B gaat en de y-as raakt.

Het punt $P(8, 8)$ ligt op de cirkel c. De lijn l raakt de cirkel c in het punt P.

8 Stel een vergelijking op van deze raaklijn l.

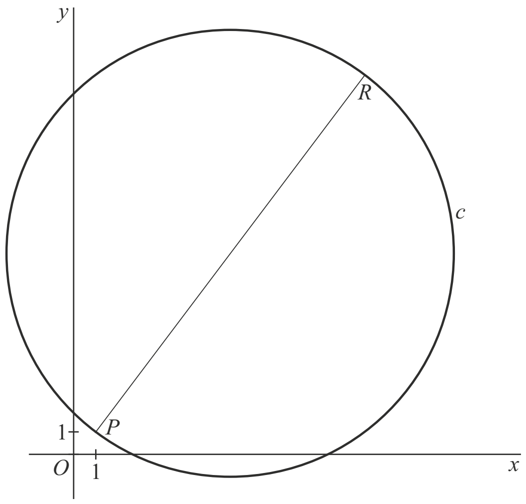
AB is de middellijn van cirkel d. Twee raaklijnen aan de cirkel d gaan door de oorsprong $O(0, 0)$.

9 Bereken de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken in graden. Rond je antwoord af op één decimaal.

© ThiemeMeulenhoff

Cirkel om vierhoek

Gegeven zijn de punten $P(1, 1)$ en $R(13, 17)$. PR is een middellijn van cirkel c.
Zie de figuur.



Een vergelijking van cirkel c is $(x - 7)^2 + (y - 9)^2 = 100$.

10 Toon dit aan.

Punt S ligt op de cirkel en heeft dezelfde x-coördinaat als punt P. Lijn l gaat door S en staat loodrecht op lijnstuk PR.
Lijn l heeft als vergelijking $y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$.

11 Toon dit aan.

Punt Q ligt zo op cirkel c, dat vierhoek $PQRS$ symmetrisch is ten opzichte van diagonaal PR.
12 Bereken de coördinaten van punt Q.

Cirkel en raaklijnen

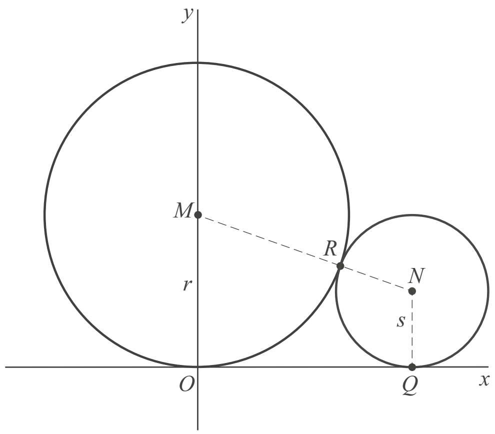
Gegeven is cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 6y = a$ waarin $a > -9$.
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = -2x + 8$.

13 Voor welke waarde van a is k een raaklijn van c?

Kies nu $a = -2$.
Twee raaklijnen aan de cirkel c gaan door de oorsprong $O(0, 0)$.
Deze raaklijnen raken c in de punten A en B.
14 Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

Rakende cirkels

In de figuur zijn in een assenstelsel twee cirkels getekend.
De linker cirkel heeft middelpunt M en straal r. Punt M ligt op de y-as.
De cirkel raakt de x-as in de oorsprong O.
De rechter cirkel heeft middelpunt N en straal s. Deze cirkel raakt de x-as in punt Q.
Er geldt: $r > s$
De cirkels raken elkaar in punt R.
Er geldt: $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$



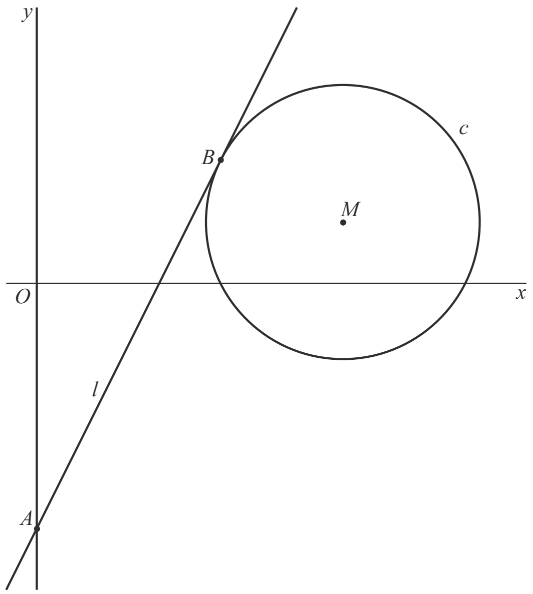
15 Toon dit aan.

Bovenstaande formule is te herleiden tot een formule van de vorm $OQ = a\sqrt{rs}$.
16 Bereken de waarde van a.

Neem $r = 4$ en $s = 1$.
Lijn l is de raaklijn aan de beide cirkels in het punt R.
17 Bereken exact de richtingscoëfficiënt van lijn l.

Raaklijn aan cirkel

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ en het punt $A(0, -4)$.
Van de twee raaklijnen door A aan cirkel c noemen we de raaklijn met de grootste richtingscoëfficiënt l. De lijn l raakt de cirkel in het punt B.
Zie de figuur.



18 Bereken exact de straal van c.

19 Stel op algebraïsche wijze een vergelijking van lijn l op. Rond in je antwoord zo nodig af op twee decimalen.

Hints bij hoofdstuk 7

1 De gevraagde afstand is straal minus MP.

2 Bereken de coördinaten van A, B en C. Daarna de hellingen van k en l.

3 Cosinusregel.

4 Bepaal de helling van MT in een geschikte rechthoekige driehoek.

5 $r = s = 2$ invullen in de formule.

6 Schets de situatie. Gebruik de formule *opp driehoek* $= \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte.

7 Snijpunten zoeken met de y-as door $x = 0$ in te vullen geeft slechts één oplossing. Een andere aanpak gaat met kwadraatafsplitsen.

8 Coördinaten middelpunt bepalen. Raaklijn l staat loodrecht op de bijbehorende straal.

9 De raaklijnen staan loodrecht op de bijbehorende stralen. Rekenen in een geschikte rechthoekige driehoek.

10 Nagaan of middelpunt en straal van de getekende cirkel overeen stemmen met middelpunt en straal die bij de vergelijking horen. Het is niet voldoende om te controleren of de coördinaten van P en Q voldoen aan de vergelijking.

11 Bereken de coördinaten van S. Stel een vergelijking op van een lijn door S die loodrecht staat op PR.

12 Q is het snijpunt van l en c.

13 Zoek de snijpunten van k en c. Dit geeft een kwadratische vergelijking die slechts één oplossing mag hebben.
Andere aanpak: na kwadraatsafsplitsen een lijn door het middelpunt van c en loodrecht op k bepalen. Snijden van deze lijn met k geeft het raakpunt.

14 Kwadraatsafsplitsen geeft middelpunt en straal van de cirkel.
Zoek gelijkvormige driehoeken.

15 Voeg punt P op de y-as toe op hoogte s, dezelfde hoogte als punt N. Dan Pythagoras in ΔPNM.

16 Onder de wortel haakjes wegwerken.

17 Gebruik een van de formules uit de vorige vragen om de coördinaten van N te berekenen. Lijn l staat loodrecht op MN.

18 Kwadraatafsplitsen.

19 Lijn l heeft de vorm $y = ax - 4$. Snijpunt bepalen met cirkel c geeft een kwadratische vergelijking in x. Deze mag maar één oplossing hebben, dus de discriminant moet 0 zijn.

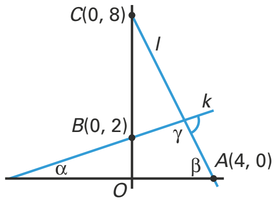
Uitwerkingen bij hoofdstuk 7

Een punt binnen een cirkel

1 De cirkel c heeft middelpunt $M(4, 5)$ en straal 5.

De afstand van $P(3, 3)$ tot M is $\sqrt{(4-3)^2+(5-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.
De exacte afstand van P tot de cirkel is straal minus MP, dus $5-\sqrt{5}$.

2 *Rekenmachine instellen op graden.*
Raakpunt A ligt recht onder M dus de coördinaten zijn $A(4, 0)$.
Voor snijpunten van c met de y-as geldt $x = 0$ dus: $(0-4)^2+(y-5)^2 = 25 \Leftrightarrow$
$16+(y-5)^2 = 25 \Leftrightarrow (y-5)^2 = 9 \Leftrightarrow y-5 = 3$ of $y-5 = -3 \Leftrightarrow y = 8$ of $y = 2$



De coördinaten van de snijpunten zijn $C(0, 8)$ en $B(0, 2)$.

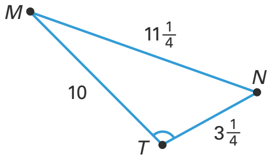
De helling van de lijn door B en P is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18{,}43...^\circ$.

De helling van de lijn door A en C is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{4} = -2 \Rightarrow \tan(\beta) = 2 \Rightarrow \beta = 63{,}43...^\circ$.

$\gamma = 180^\circ - 63{,}43...^\circ - 18{,}43...^\circ = 98{,}13...^\circ$ maar dat is een stompe hoek.
De hoek is tussen k en l is $180 - 98{,}13...^\circ = 81{,}86...^\circ$. Afgerond 82°.

Drie cirkels

3 *Rekenmachine instellen op graden.*



$MN = r + s = 11\frac{1}{4}$, $MT = r + t = 10$ en $NT = s + t = 3\frac{1}{4}$.
Cosinusregel in ΔMTN:

$MN^2 = MT^2 + NT^2 - 2 \cdot MT \cdot NT \cdot \cos(\angle MTN) \Leftrightarrow$

$\left(11\frac{1}{4}\right)^2 = 10^2 + \left(3\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3\frac{1}{4} \cdot \cos(\angle MTN) \Leftrightarrow$

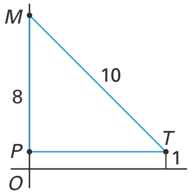
$126{,}5625 = 100 + 10{,}5625 - 65 \cdot \cos(\angle MTN) \Leftrightarrow$

$16 = -65 \cdot \cos(\angle MTN) \Leftrightarrow \cos(\angle MTN) = \frac{16}{-65} = -0{,}246... \Rightarrow \angle MTN = 104{,}25...^\circ$

Afgerond op hele graden: $\angle MTN = 104^\circ$

© ThiemeMeulenhoff

4 Voeg het punt $P(0, 1)$ aan de figuur toe. ΔMPT is dan rechthoekig met $MP = 8$.



Pythagoras in ΔMPT: $8^2 + PT^2 = 10^2 \Leftrightarrow PT^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow PT = 6$.

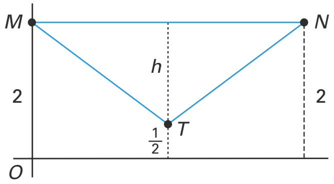
De helling van MT is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$.

Een vergelijking van de lijn door M en T is: $y = -\frac{4}{3}x + 9$.

5 $r = s = 2$ invullen in de formule:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{t} = \sqrt{2} \Rightarrow 4t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

6 Als $r = s = 2$ liggen M en N beide op $y = 2$.



$MN = r + s = 4$ en $h = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

De oppervlakte van $\Delta MNT = \frac{1}{2} \cdot basis \cdot hoogte = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 3$.

Twee cirkels

7 Coördinaten van $A(2, 0)$ invullen in de vergelijking van c:
$2^2 - 10 \cdot 2 + 0^2 - 8 \cdot 0 + 16 = 0 \Leftrightarrow 4 - 20 + 16 = 0$ klopt, dus A ligt op de cirkel.
Nu $B(8, 0)$ invullen: $8^2 - 10 \cdot 8 + 0^2 - 8 \cdot 0 + 16 = 0 \Leftrightarrow 64 - 80 + 16 = 0$ klopt, dus ook B ligt op de cirkel.
Voor snijpunten van c met de y-as geldt: $x = 0 \Leftrightarrow 0^2 - 10 \cdot 0 + y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow$
$y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow$ het enige snijpunt van c met de y-as is $(0, 4)$ dus c raakt de y-as.
andere manier om te laten zien dat c de y-as raakt
Kwadraatafsplitsen:

$x^2 - 10x + y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Leftrightarrow$
$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 25$
c heeft middelpunt $(5, 4)$ en straal 5.
De afstand van het middelpunt tot de y-as is gelijk aan de straal dus c raakt de y-as.

© ThiemeMeulenhoff

8 Kwadraatafsplitsen (zie vorige vraag) geeft $M(5, 4)$ als het middelpunt van c.
Raaklijn l staat loodrecht op straal MP dus $rc_{MP} \cdot rc_l = -1$.

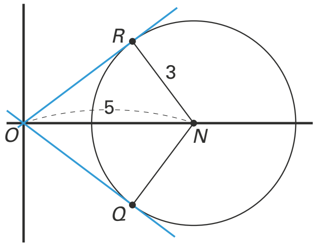
$rc_{MP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-4}{8-5} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot rc_l = -1 \Leftrightarrow rc_l = -\frac{3}{4}$

Een vergelijking van l is van de vorm $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Hierin $P(8, 8)$ invullen om b te berekenen: $8 = -\frac{3}{4} \cdot 8 + b \Leftrightarrow 8 = -6 + b \Leftrightarrow b = 14$

Een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x + 14$.

9 *Rekenmachine instellen op graden.*
AB is middellijn van cirkel d, dus d heeft middelpunt $N(5, 0)$ en straal 3.



R en Q zijn de raakpunten van de raaklijnen aan cirkel d.

$ON = 5$ en $NR = 3$ dus $\sin(\angle RON) = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle RON = 36{,}86...°$
$\angle ROQ = 2 \cdot 36{,}86...° = 73{,}73...°$
Afgerond op één decimaal is de hoek tussen de raaklijnen gelijk aan 73,7°.

Cirkel om vierhoek

10 Bij $(x-7)^2 + (y-9)^2 = 100$ hoort een cirkel met middelpunt (7, 9) en straal 10.

Het middelpunt van lijnstuk PQ is $\left(\frac{1+13}{2}, \frac{1+17}{2}\right) = (7, 9)$ dus dat klopt met de vergelijking van c.
De afstand van (7, 9) tot $P(1, 1)$ is $\sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ en dat klopt ook dus de vergelijking van c is correct.

11 $x_P = x_S = 1$ invullen geeft $(1-7)^2 + (y-9)^2 = 100 \Leftrightarrow 36 + (y-9)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$(y-9)^2 = 64 \Leftrightarrow y - 9 = 8$ of $y - 9 = -8 \Leftrightarrow y = 17$ of $y = 1$
De coördinaten van S zijn (1, 17).

De helling van PR is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17-1}{13-1} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = rc_{PR}$.

l staat loodrecht op PR elkaar dus $rc_l \cdot rc_{PR} = -1 \Leftrightarrow rc_l \cdot \frac{4}{3} = -1 \Leftrightarrow$

$rc_l = -\frac{3}{4} \Rightarrow$ een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Coördinaten van $S(1, 17)$invullen geeft: $17 = -\frac{3}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 17\frac{3}{4}$.
De gegeven vergelijking van l is correct.

© ThiemeMeulenhoff

12 Vierhoek $PQRS$ is symmetrisch ten opzichte van de diagonaal $PR \Rightarrow$
Q is het spiegelbeeld van S in de lijn $PR \Rightarrow$

Q ligt op de lijn $l: y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4} \Rightarrow Q$ is het snijpunt van l en c.

$y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$ substitueren in de vergelijking van c:

$(x-7)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4} - 9\right)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$(x-7)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}\right)^2 = 100 \Leftrightarrow$

$x^2 - 14x + 49 + \frac{9}{16}x^2 - 13\frac{1}{8}x + 76\frac{9}{16} = 100 \Leftrightarrow$

$1\frac{9}{16}x^2 - 27\frac{1}{8}x + 25\frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow$ *(vermenigvuldig met 16)*

$25x^2 - 434x + 409 = 0$

abc-formule met $D = (-434)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 409 = 147\,456 \Rightarrow$

$x = \frac{-(-434) \pm \sqrt{147\,456}}{50} = \frac{434 \pm 384}{50} \Leftrightarrow x = 1$ of $x = 16{,}36$

$x = 1$ hoort bij punt S, dus $x = 16{,}36$ is de x-coördinaat van Q.

$y_Q = -\frac{3}{4} \cdot 16{,}36 + 17\frac{3}{4} = 5{,}48$.

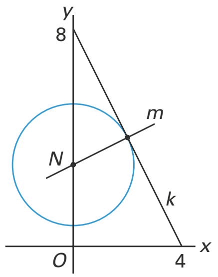
De coördinaten van Q zijn (16,36; 5,48).

Cirkel en raaklijnen

13 Substitueer $y = -2x + 8$ in de vergelijking van c om de snijpunt(en) te berekenen:
$x^2 + (-2x+8)^2 - 6(-2x+8) = a \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 32x + 64 + 12x - 48 = a \Leftrightarrow$
$5x^2 - 20x + 16 - a = 0$
k is raaklijn aan de cirkel als deze laatste vergelijking precies één oplossing heeft, dus als de discriminant 0 is.
$D = (-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (16 - a) = 0 \Leftrightarrow 400 - 320 + 20a = 0 \Leftrightarrow 20a = -80 \Leftrightarrow a = -4$
Als $a = -4$ is k raaklijn aan de cirkel.
andere manier
Kwadraatafsplitsen:
$x^2 + y^2 - 6y = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = a + 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = a + 9$
Bij deze vergelijking hoort een cirkel met middelpunt $N(0, 3)$ en straal $\sqrt{a+9}$.
De lijn m door N en het raakpunt van c en k snijdt raaklijn k loodrecht,

dus $rc_k \cdot rc_m = -1 \Leftrightarrow -2 \cdot rc_m = -1 \Leftrightarrow rc_m = \frac{1}{2} \Rightarrow$

m: $y = \frac{1}{2}x + 3$.



Coördinaten raakpunt berekenen:

$\frac{1}{2}x + 3 = -2x + 8 \Leftrightarrow 2\frac{1}{2}x = 5 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$

de coördinaten van het raakpunt zijn (2, 4).
Afstand tussen $N(0, 3)$ en (2, 4) is

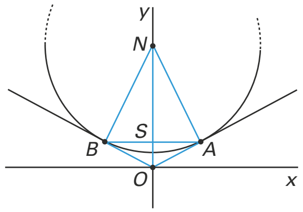
$\sqrt{(2-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Deze afstand is gelijk zijn aan de straal van de cirkel dus:

$\sqrt{a+9} = \sqrt{5} \Rightarrow a + 9 = 5 \Leftrightarrow a = -4$

© ThiemeMeulenhoff

14 $x^2 + y^2 - 6y = -2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = -2 + 9 \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 7$
Bij deze vergelijking hoort een cirkel met middelpunt $N(0, 3)$ en straal $\sqrt{7}$.



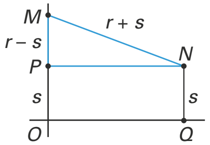
De lijn door O en A is raaklijn aan de cirkel dus $\angle OAN = 90°$.
Pythagoras in ΔOAN: $OA^2 + (\sqrt{7})^2 = 3^2 \Leftrightarrow OA^2 + 7 = 9 \Leftrightarrow OA = \sqrt{2}$.
S is het snijpunt van AB met de y-as.
Vanwege symmetrie liggen de punten A en B even hoog, dus $AB \perp ON$.
ΔOAN is gelijkvormig met ΔANS, want (1) $\angle OAN = \angle ASN = 90°$ en (2) $\angle N = \angle N$.

Dus $\frac{NO}{AO} = \frac{AN}{SA} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{SA} \Leftrightarrow SA = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{14}$.

De exacte lengte van AB is dan $\frac{2}{3}\sqrt{14}$.

Rakende cirkels

15 Voeg punt P op de y-as toe op hoogte s, dus op dezelfde hoogte als punt N.
$MP = r - s$ en $MN = r + s$



Pythagoras in ΔPNM:

$PN^2 + MP^2 = MN^2 \Leftrightarrow PN^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2 \Leftrightarrow PN^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 \Leftrightarrow$

$PN = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$ en omdat $OQ = PN$ geldt ook $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$

16 $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = \sqrt{r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + 2rs - s^2} = \sqrt{4rs} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{rs} = 2\sqrt{rs}$
dus $a = 2$

17 $r = 4 \Rightarrow M(0, 4)$
$r = 4$, $s = 1$ en de formule uit de vorige vraag $\Rightarrow OQ = 2\sqrt{4 \cdot 1} = 4$ dus $N(4, 1)$.

$rc_{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4}$

Lijn l is de raaklijn aan beide cirkels in punt R dus l staat loodrecht op $MN \Rightarrow$

$rc_l \cdot rc_{MN} = -1 \Leftrightarrow rc_l \cdot \frac{-3}{4} = -1 \Leftrightarrow rc_l = \frac{4}{3}$.

De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\frac{4}{3}$.

© ThiemeMeulenhoff

Raaklijn aan cirkel

18 Kwadraatafsplitsen met de vergelijking van c geeft:
$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + y^2 - 2y = -21 \Leftrightarrow$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -21 + 25 + 1 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$
dus de straal van cirkel c is $\sqrt{5}$.

19 Lijn l gaat door $A(0, -4)$ dus een vergelijking van l is $y = ax - 4$.
Snijpunt bepalen van l en c door substitutie van $y = ax - 4$:
$x^2 + (ax-4)^2 - 10x - 2(ax-4) + 21 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + a^2x^2 - 8ax + 16 - 10x - 2ax + 8 + 21 = 0 \Leftrightarrow$
$(1 + a^2)x^2 + (-8a - 10 - 2a)x + 45 = 0 \Leftrightarrow$
$(1 + a^2)x^2 + (-10a - 10)x + 45 = 0$
Deze kwadratische vergelijking in x mag maar één oplossing hebben, omdat l raaklijn is.
De discriminant moet dan 0 zijn: $D = (-10a - 10)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 45 = 0 \Leftrightarrow$
$100a^2 + 200a + 100 - 180 - 180a^2 = 0 \Leftrightarrow$
$-80a^2 + 200a - 80 = 0 \Leftrightarrow$ (*delen door –40*)
$2a^2 - 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow (2a-1)(a-2) = 0$ (*kan ook met de abc-formule*)

dus $a = \frac{1}{2}$ *of* $a = 2$.

Lijn l heeft de grootste richtingscoëfficiënt van de twee raaklijnen dus $a = 2$.
Een vergelijking van lijn l is $y = 2x - 4$.

andere manier
Uit de vorige vraag volgt het middelpunt $M(5, 1)$ en $MB = \sqrt{5}$.

$AM = \sqrt{(5-0)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{50}$.
Als l raaklijn is aan c, staat MB loodrecht op l dus ΔABM is rechthoekig.
Pythagoras in ΔABM geeft:
$AB^2 + BM^2 = AM^2 \Leftrightarrow AB^2 + 5 = 50 \Leftrightarrow AB^2 = 45 \Leftrightarrow AB = \sqrt{45}$

Punt B ligt op een cirkel met middelpunt $A(0, -4)$ en straal $AB = \sqrt{45}$.
Een vergelijking van deze cirkel is $x^2 + (y+4)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 + (y+4)^2 - 45 = 0$.
De snijpunten van deze cirkels berekenen:
$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = x^2 + (y+4)^2 - 45 \Leftrightarrow$
$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = x^2 + y^2 + 8y + 16 - 45 \Leftrightarrow$
$-10y = 10x - 50 \Leftrightarrow y = -x + 5$
De twee snijpunten, waarvan B er een is, liggen dus op de lijn $y = -x + 5$.
Substitueren van $y = -x + 5$ in de cirkelformule $x^2 + (y+4)^2 = 45$ geeft:
$x^2 + (-x + 5 + 4)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 + (-x + 9)^2 = 45 \Leftrightarrow$
$x^2 + x^2 - 18x + 81 = 45 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-6)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ of $x = 3$ dus $x_B = 3$ en $y_B = -3 + 5 = 2$.

De lijn l door $A(0, -4)$ en $B(3, 2)$ heeft helling $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - -4}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$.
Een vergelijking van lijn l is $y = 2x - 4$.

© ThiemeMeulenhoff

Oefenen met hele examens, met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de goede antwoorden.

Deel 2a Examens met uitwerkingen

Examen 2016-I

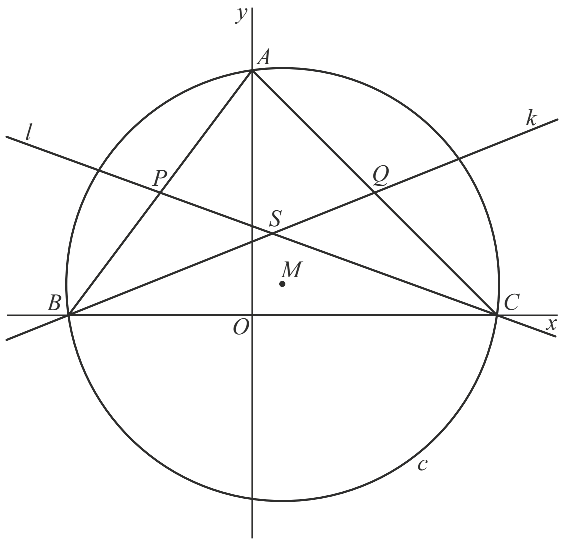
De rechte van Euler

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ die door het punt $A(0, 4)$ gaat.

3p **1** Stel een vergelijking op van c.

De punten $B(-3, 0)$ en $C(4, 0)$ liggen op c.
Punt Q is het midden van lijnstuk AC.
Lijn k is de lijn door B en Q. Een vergelijking van k is $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.
Punt P is het midden van lijnstuk AB.
Lijn l is de lijn door C en P.
Punt S is het snijpunt van k en l. Zie figuur 1.

figuur 1

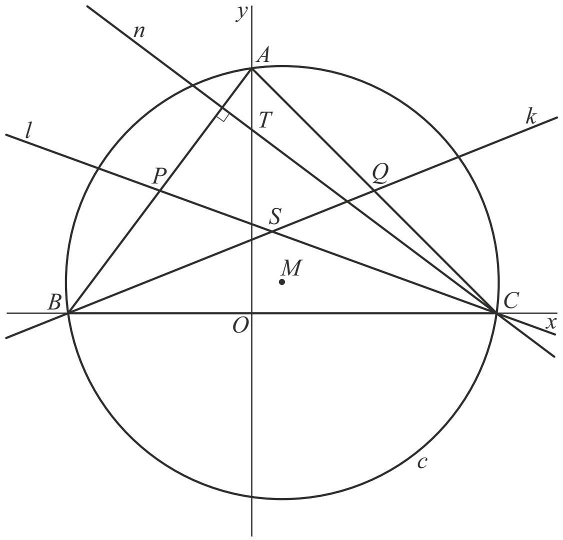


De coördinaten van S zijn $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

5p **2** Bewijs dat de coördinaten van S inderdaad $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ zijn.

Lijn n gaat door C en staat loodrecht op AB.
Bovendien snijdt lijn n de y-as in punt T.
Zie figuur 2.

figuur 2



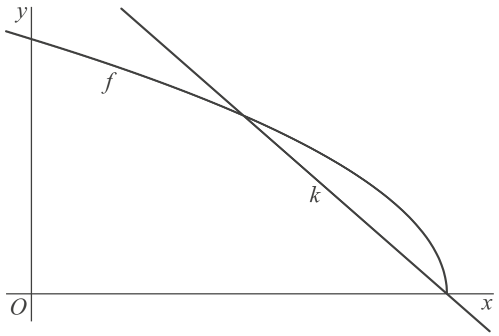
Volgens de achttiende-eeuwse wiskundige Euler liggen de punten M, S en T op één lijn.

7p **3** Bewijs dat M, S en T inderdaad op één lijn liggen.

Een wortelfunctie

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$. Lijn k heeft vergelijking $y = -\frac{7}{4}x + \frac{7}{2}$.
In figuur 1 zie je de grafiek van f en lijn k.

figuur 1

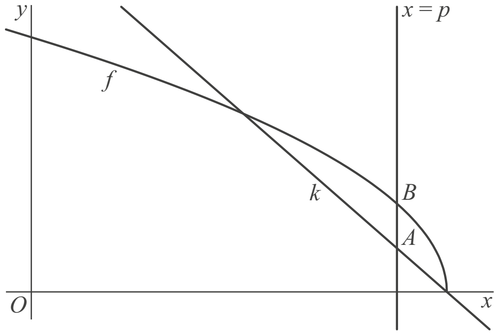


Lijn k en de grafiek van f hebben twee punten gemeenschappelijk.

5p **4** Bereken exact de x-coördinaten van deze twee punten.

De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt k in punt A en de grafiek van f in punt B.
De y-coördinaat van B is groter dan de y-coördinaat van A.
Zie figuur 2.

figuur 2



Er is een waarde van p waarvoor de afstand tussen A en B maximaal is.

6p **5** Bereken met behulp van differentiëren deze waarde van p.

Schijngestalten van de maan

Van de maan is ook bij een wolkeloze hemel niet altijd een even groot gedeelte zichtbaar. Het percentage van de maan dat zichtbaar is, verloopt bij benadering periodiek. Voor het jaar 2017 is dit percentage in Nederland te benaderen met de formule:

$P = 50 + 50\sin(0{,}212769t - 1{,}042563)$

Hierin is P het percentage van de maan dat zichtbaar is en t is de tijd in dagen met $t = 0$ op 1 januari 2017 om 0:00 uur.

3p **6** Bereken de periode van P in hele minuten nauwkeurig.

De vorm van het zichtbare gedeelte van de maan wordt de **schijngestalte** van de maan genoemd. Vier speciale schijngestalten zijn **nieuwe maan**, **eerste kwartier**, **volle maan** en **laatste kwartier**. Zie de figuur, waarin ze op volgorde staan afgebeeld, elk met het bijbehorende percentage van de maan dat zichtbaar is.

nieuwe maan	eerste kwartier	volle maan	laatste kwartier	nieuwe maan
0% zichtbaar	50% zichtbaar	100% zichtbaar	50% zichtbaar	0% zichtbaar

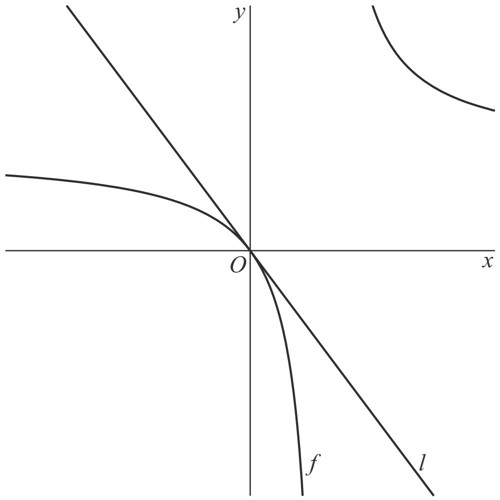
De volgorde waarin deze schijngestalten voorkomen, is dus altijd: eerst nieuwe maan, dan eerste kwartier, dan volle maan en daarna laatste kwartier. Daarna volgt opnieuw nieuwe maan, enzovoort.

3p **7** Bereken met behulp van de formule voor P op welke datum in 2017 het voor het eerst nieuwe maan zal zijn.

4p **8** Onderzoek met behulp van de formule voor P tussen welke twee opeenvolgende schijngestalten de maan zich op 22 februari 2017 zal bevinden.

Gebroken functie en raaklijn

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{12}{x-3} + 4$. Lijn l raakt in de oorsprong aan de grafiek van f. Zie de figuur.



De richtingscoëfficiënt van l is $-\frac{4}{3}$.

3p **9** Toon met behulp van differentiëren aan dat de richtingscoëfficiënt van l inderdaad $-\frac{4}{3}$ is.

Lijn k staat loodrecht op l en gaat door de oorsprong. k snijdt de grafiek van f in de oorsprong, en ook nog in een ander punt.

6p **10** Bereken exact de coördinaten van dit punt.

Klok

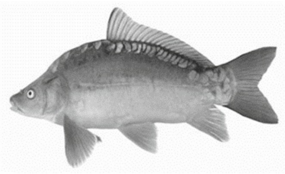
De klok hierboven heeft een kleine wijzer met een lengte van 8,5 cm en een grote wijzer met een lengte van 12,5 cm. Het uiteinde van de kleine wijzer noemen we *A*; het uiteinde van de grote wijzer noemen we *B*.

Als het bijvoorbeeld 2:00 uur is, dan wijst de kleine wijzer precies naar 2 en staat de grote wijzer precies op 12.
Is het bijvoorbeeld 2:15 uur (kwart over twee), dan heeft de kleine wijzer precies een kwart van de hoek tussen de 2 en de 3 afgelegd; de grote wijzer staat dan precies op 3.

Op de klok op de foto is het precies 2:25 uur (vijf voor half drie).

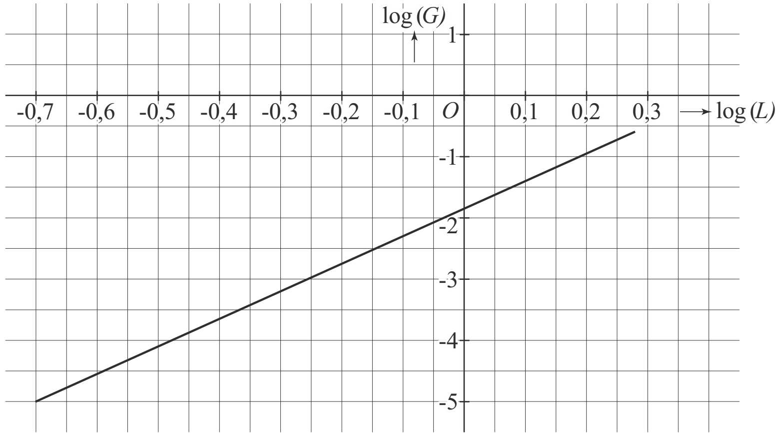
7p **11** Bereken in deze situatie de afstand tussen *A* en *B*. Geef je antwoord in gehele millimeters nauwkeurig.

Karpers



In het begin van hun leven ontwikkelen karpers zich van larve tot klein visje. Aan het einde van deze ontwikkeling heeft het visje een lengte van ongeveer 1,9 cm.

De lengte van de karperlarve in centimeter noemen we *L*.
Het gewicht van de karperlarve in gram noemen we *G*.
In de figuur is het verband tussen log(*L*) en log(*G*) weergegeven.



4p **12** Bepaal met behulp van de figuur het gewicht van een karperlarve met een lengte van 0,8 cm. Geef je antwoord in hele milligrammen nauwkeurig.

Het verband tussen de lengte van karperlarven en hun gewicht kan beschreven worden met een formule van de vorm:

$G = 0{,}014 \cdot L^{b}$ met $0{,}2 \le L \le 1{,}9$

Hierin is *L* de lengte in centimeter, *G* het gewicht in gram en *b* een constante.

Een karperlarve van 1,9 cm weegt ongeveer 0,25 g.
Hieruit volgt dat *b* afgerond op één decimaal gelijk is aan 4,5.

3p **13** Bereken *b* met behulp van deze gegevens in twee decimalen nauwkeurig.

De formule $0{,}014 \cdot L^{4,5}$ is te herleiden tot een formule van de vorm
$\log(G) = p + q \cdot \log(L)$.

4p **14** Bereken de waarden van *p* en *q*. Geef beide waarden in één decimaal nauwkeurig.

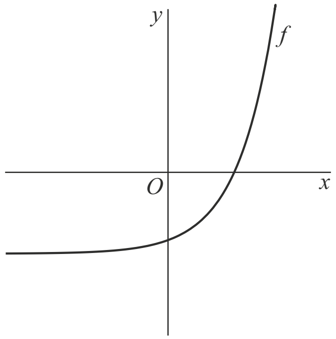
Voor volwassen karpers (met $10 \le L \le 94$) is *G* evenredig met $L^{3,13}$.
Hierin is *L* weer de lengte in centimeter en *G* het gewicht in gram.

3p **15** Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Exponentiële functie

De functie *f* is gegeven door $f(x) = 3^{x-1} - 2$. Zie figuur 1.

figuur 1



3p **16** Bereken exact de waarde van *x* waarvoor geldt: $f(x) = 241$

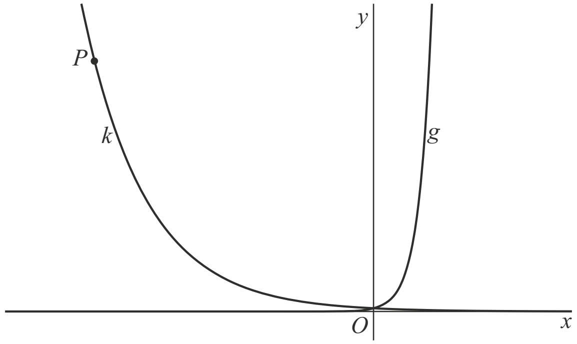
De functie *g* is gegeven door $g(x) = 3^x$.

Op de grafiek van *g* worden de volgende transformaties uitgevoerd: eerst de verschuiving 6 omlaag, gevolgd door de vermenigvuldiging met $\frac{1}{3}$ ten opzichte van de *x*-as. Op deze manier ontstaat de grafiek van de functie *h*.

4p **17** Toon op algebraïsche wijze aan dat *h* dezelfde functie is als *f*.

De grafiek van *g* wordt met *a* vermenigvuldigd ten opzichte van de *y*-as. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie *k*. Het punt *P* (–20, 81) ligt op de grafiek van *k*. Zie figuur 2.

figuur 2



4p **18** Bereken exact de waarde van *a*.

Hints bij examen 2016-I

1 Gebruik de vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ voor de cirkel.

2 Bereken de coördinaten van *P* en stel daarna een vergelijking op van de lijn door *C* en *P*.

3 Gebruik $rc_n \cdot rc_{AB} = -1$ om een vergelijking van lijn *n* op te stellen. Hieruit volgen de coördinaten van *T*. Kies twee van de punten *M, S* en *T*. Stel een vergelijking op van de lijn door deze punten en controleer of het derde punt ook op deze lijn ligt.

4 Los de wortelvergelijking op door kwadrateren. Niet alleen het antwoord, maar alle tussenstappen moeten exact.

5 Stel een formule op voor de lengte van *AB* en bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van *p* deze formule een maximum heeft.

6 De periode van $f(t) = \sin(bt)$ is gelijk aan $\frac{2\pi}{b}$.

7 Het is nieuwe maan als $P = 0$. Deze vergelijking mag met de rekenmachine worden opgelost.

8 22 februari duurt van 22 feb 0:00 uur tot 23 feb 0:00 uur. Tel het aantal dagen tot 22 feb 0:00 uur.

9 Eerst *f* herschrijven en daarna differentiëren met de kettingregel.

10 Stel een vergelijking op van lijn *k*. Bepaal de snijpunten van lijn *k* en de grafiek van *f*. Een van beide snijpunten is de oorsprong, maar de vraag gaat over het andere snijpunt.

11 Bereken eerst de hoek tussen beide wijzers. Vervolgens de cosinusregel.

12 Bereken $\log(L)$ en lees in de figuur de hierbij behorende waarde van $\log(G)$ af.

13 Vul de gegevens in en los de vergelijking op. Dat kan met een logaritme maar ook met de rekenmachine.

14 Gebruik rekenregels voor logaritmen:
${}^g\log(a \cdot b) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$ en ${}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a)$

15 Stel een mogelijke formule op voor de evenredigheid, vul de gegevens in en bepaal de verhouding van de gewichten.

16 *Intersect* en *Solver* niet toegestaan. Werk toe naar een vergelijking met links en rechts grondtal 3.

17 Pas de transformaties toe op *g*. De gevonden formule kan worden omgewerkt tot die van *f*.

18 Zoek op de grafiek van *g* het originele punt met *y*-coördinaat 81.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2016-I

De rechte van Euler

3p **1** Een cirkel met middelpunt $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ heeft als vergelijking $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=r^2$.
De cirkel gaat door het punt $A(0, 4)$. Deze coördinaten invullen in de vergelijking:

$(0-\frac{1}{2})^2+(4-\frac{1}{2})^2=r^2$ [1p] $\Leftrightarrow$ $(\frac{1}{2})^2+(3\frac{1}{2})^2=r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+12\frac{1}{4}=r^2 \Leftrightarrow r^2=12\frac{1}{2}$ [1p]

dus een vergelijking van c is $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=12\frac{1}{2}$ [1p]

andere manier
De lengte van AM is gelijk aan de straal r van cirkel c.
$AM=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(0-\frac{1}{2})^2+(4-\frac{1}{2})^2}$ [1p] $=\sqrt{12\frac{1}{2}}$ [1p] $=r$

dus een vergelijking van c is $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=12\frac{1}{2}$ [1p]

5p **2** De coördinaten van P zijn $(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=(\frac{0-3}{2},\frac{4+0}{2})=(-1\frac{1}{2},2)$ [1p]

De richtingscoëfficiënt van de lijn l door $C(4, 0)$ en $P(-1\frac{1}{2},2)$ is
$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-0}{-1\frac{1}{2}-4}=\frac{2}{-5\frac{1}{2}}=-\frac{4}{11}$ [1p] en dit geeft $y=-\frac{4}{11}x+b$.

De lijn l gaat door $C(4, 0)$ dus $0=-\frac{4}{11}\cdot 4+b \Leftrightarrow b=\frac{16}{11}$ [1p] dus $l: y=-\frac{4}{11}x+\frac{16}{11}$.

Het snijpunt van $k: y=\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$ en $l: y=-\frac{4}{11}x+\frac{16}{11}$ volgt uit:

$\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=-\frac{4}{11}x+\frac{16}{11} \Leftrightarrow \frac{22}{55}x+\frac{66}{55}=-\frac{20}{55}x+\frac{80}{55} \Leftrightarrow 22x+66=-20x+80 \Leftrightarrow$

$42x=14 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ [1p] en hieruit volgt $y=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6}{5}=\frac{2}{15}+\frac{18}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$. [1p]

De coördinaten van S zijn inderdaad $(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$.

7p **3** $A(0, 4)$ en $B(-3, 0)$ geeft $\text{rc}_{AB}=\frac{4}{3}$. [1p]
Lijn n staat loodrecht op AB dus $\text{rc}_n\cdot\text{rc}_{AB}=-1 \Leftrightarrow \text{rc}_n\cdot\frac{4}{3}=-1 \Leftrightarrow \text{rc}_n=-\frac{3}{4}$. [1p]

Lijn $n: y=-\frac{3}{4}x+b$ gaat door $C(4, 0)$ dus $0=-\frac{3}{4}\cdot 4+b \Leftrightarrow b=3$ [1p] dus $T(0, 3)$. [1p]

De richtingscoëfficiënt van de lijn door $M(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ en $T(0, 3)$ is

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}=\frac{2\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5$ [1p] dus een vergelijking van de lijn door M en T is $y=-5x+3$.
[1p]

Nagaan of de coördinaten van $S(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ voldoen aan deze vergelijking:

$\frac{4}{3}=-5\cdot\frac{1}{3}+3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}=-\frac{5}{3}+\frac{9}{3}$ en dat klopt, dus liggen M, S en T op één lijn. [1p]

Een wortelfunctie

5p **4** Lijn k snijdt de grafiek van f als geldt: $-\frac{7}{4}x+\frac{7}{2}=\sqrt{-3x+6}$ [1p] $\Rightarrow$ *(kwadrateren)*

$(-\frac{7}{4}x+\frac{7}{2})^2=(\sqrt{-3x+6})^2 \Leftrightarrow \frac{49}{16}x^2-\frac{98}{8}x+\frac{49}{4}=-3x+6$ [1p] $\Leftrightarrow$ *(vermenigvuldigen met 16)*
$49x^2-196x+196=-48x+96 \Leftrightarrow 49x^2-148x+100=0$ [1p]
Discriminant $=(-148)^2-4\cdot 49\cdot 100=2304$
abc-formule: $x=\frac{-(-148)\pm\sqrt{2304}}{2\cdot 49}$ [1p] $=\frac{148\pm 48}{98} \Leftrightarrow x=\frac{196}{98}=2$ of $x=\frac{100}{98}=\frac{50}{49}$

De exacte x-coördinaten van de twee snijpunten zijn $x=2$ en $x=\frac{50}{49}$ (of $1\frac{1}{49}$). [1p]

6p **5** De lengte L tussen de punten A en B is gelijk aan $L=\sqrt{-3p+6}-(-\frac{7}{4}p+\frac{7}{2})$ [1p] $\Rightarrow$
$L=\sqrt{-3p+6}+\frac{7}{4}p-\frac{7}{2}=(-3p+6)^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{4}p-\frac{7}{2}$

Differentiëren met de kettingregel: $L'=\frac{1}{2}(-3p+6)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-3)+\frac{7}{4}=\frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}}+\frac{7}{4}$ [2p]

dus $L'=0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2\sqrt{-3p+6}}+\frac{7}{4}=0$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt{-3p+6}}=\frac{7}{4}$ *(kruislings vermenigvuldigen)*

$14\sqrt{-3p+6}=12$ *(kwadrateren)* $\Rightarrow 196(-3p+6)=144$ [1p] $\Leftrightarrow -588p+1176=144 \Leftrightarrow$

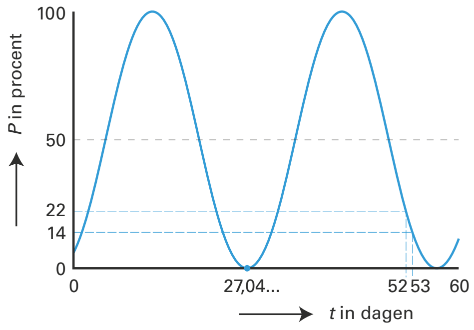
$-588p=-1032 \Leftrightarrow p=\frac{-1032}{-588}=\frac{86}{49}$

De afstand tussen A en B is maximaal als $p=\frac{86}{49}$ (of $p\approx 1{,}76$). [1p]
Uit figuur 2 in de opgave volgt dat bij de gevonden waarde van p een maximum hoort.

Schijngestalten van de maan

3p **6** De periode is $\frac{2\pi}{0{,}212769}$ [1p] = 29,53... dagen [1p] en dat zijn
29,53... · 24 · 60 = 42 523,99... dus afgerond 42 524 minuten. [1p]

3p **7** Het is nieuwe maan als $P=0 \Leftrightarrow 50+50\sin(0{,}212769t-1{,}042563)=0$. [1p]
Het gaat dus om het eerste minimum van de sinusfunctie voor positieve t.
Rekenmachine instellen op radialen.
Voer in de grafische rekenmachine in $y_1=50+50\sin(0{,}212769x-1{,}042563)$ en bereken met de optie *zero* de x-coördinaat van het betreffende nulpunt.



De rekenmachine geeft $x=27{,}04...$ [1p] dus dan zijn er iets meer dan 27 dagen verstreken $\Rightarrow$ op 28 januari [1p] is het voor het eerst nieuwe maan in 2017.

4p **8** 22 februari duurt van 22 feb 0:00 uur tot 23 feb 0:00 uur. Omdat januari 31 dagen heeft, is dat van $t = 52$ tot $t = 53$. [1p]
$P(52) = 50 + 50\sin(0{,}212769 \cdot 52 - 1{,}042563) = 21{,}9...$ dus ongeveer 22%.
$P(53) = 50 + 50\sin(0{,}212769 \cdot 53 - 1{,}042563) = 13{,}8...$ dus ongeveer 14%. [1p]
Zie de grafiek in de vorige vraag.
Op 22 februari neemt het zichtbare percentage af van 22 naar 14 [1p] dus bevindt de maan zich tussen laatste kwartier en nieuwe maan. [1p]

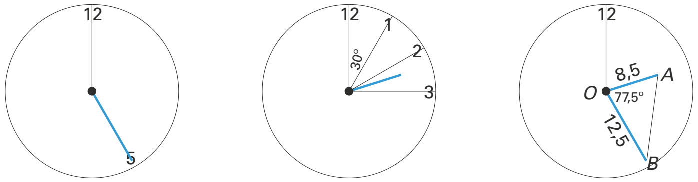
Gebroken functie en raaklijn

3p **9** Eerst f herschrijven en daarna differentiëren met de kettingregel.
$f(x) = \frac{12}{x-3} + 4 = 12(x-3)^{-1} + 4$ [1p] $\Rightarrow f'(x) = -12(x-3)^{-2} \cdot 1 = \frac{-12}{(x-3)^2}$ [1p]
De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l aan f in de oorsprong is
$f'(0) = \frac{-12}{(0-3)^2} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3}$ [1p]

6p **10** Lijn k staat loodrecht op l dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \cdot \text{rc}_l = -1 \Leftrightarrow \text{rc}_l = \frac{3}{4}$. [1p]
Lijn k gaat door de oorsprong dus een vergelijking van k is $y = \frac{3}{4}x$. [1p]
Lijn k snijdt de grafiek van f als $\frac{3}{4}x = \frac{12}{x-3} + 4 \Leftrightarrow$
$\frac{3}{4}x - 4 = \frac{12}{x-3} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}x - 4\right)(x-3) = 12$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - 4x + 12 = 12 \Leftrightarrow$
$\frac{3}{4}x^2 - 6\frac{1}{4}x = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $\frac{3}{4}x = 6\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0$ of $3x = 25 \Leftrightarrow$
$x = 0$ of $x = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ [1p]
De oplossing $x = 0$ hoort bij de oorsprong.
$x = 8\frac{1}{3}$ invullen geeft $f(8\frac{1}{3}) = \frac{12}{8\frac{1}{3} - 3} + 4 = \frac{12}{5\frac{1}{3}} + 4 = \frac{36}{16} + 4 = \frac{9}{4} + 4 = 6\frac{1}{4}$ dus de coördinaten van het andere snijpunt zijn $\left(8\frac{1}{3}, 6\frac{1}{4}\right)$. [1p]

Klok

7p **11** Als de grote wijzer van 12 naar 5 draait, doorloopt hij een hoek van $\frac{5}{12} \cdot 360° = 150°$. [1p]
Als de kleine wijzer van 12 naar de positie tussen 2 en 3 zoals op de foto draait, doorloopt hij een hoek van $30° + 30° + \frac{5}{12} \cdot 30° = 72{,}5°$. [2p]
Hoek AOB is dan $150° - 72{,}5° = 77{,}5°$. [1p]

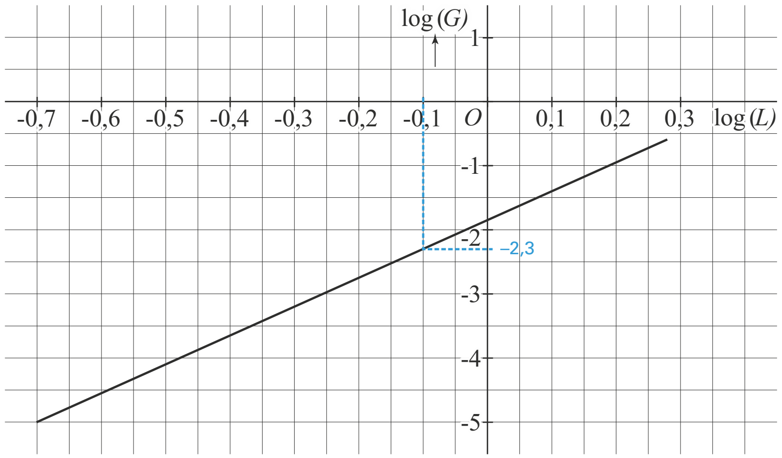


Cosinusregel in ΔAOB (*rekenmachine instellen op graden*):
$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\angle AOB) \Leftrightarrow$
$AB^2 = 8{,}5^2 + 12{,}5^2 - 2 \cdot 8{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot \cos(77{,}5°)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$AB^2 = 182{,}506...$ [1p] $\Rightarrow AB = 13{,}509...$ cm
Afgerond op millimeters is de afstand tussen A en B dan 135 mm. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Karpers

4p **12** Gegeven is $L = 0{,}8$ cm $\Rightarrow \log(L) = -0{,}0969... \approx -0{,}1$ [1p]
In de figuur kan de bijbehorende waarde van $\log(G)$ worden afgelezen.



Dit geeft $\log(G) \approx -2{,}3$ [1p] dus $G = 10^{-2{,}3}$ [1p] $= 0{,}00501...$ gram.
Afgerond weegt de karperlarve 5 milligram. [1p]

3p **13** $G = 1{,}9$ en $L = 0{,}25$ invullen in de formule geeft:
$0{,}25 = 0{,}014 \cdot 1{,}9^b$ [1p] $\Leftrightarrow 1{,}9^b = \frac{0{,}25}{0{,}014} = 17{,}8... \Leftrightarrow b = {}^{1{,}9}\log(17{,}8...)$ [1p] $= 4{,}4907...$
In twee decimalen nauwkeurig: $b = 4{,}49$. [1p]
De vergelijking $0{,}25 = 0{,}014 \cdot 1{,}9^b$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost.

4p **14** $G = 0{,}014 \cdot L^{4{,}5} \Rightarrow \log(G) = \log(0{,}014 \cdot L^{4{,}5})$ [1p] $\Rightarrow$
$\log(G) = \log(0{,}014) + \log(L^{4{,}5})$ [1p] $= \log(0{,}014) + 4{,}5 \cdot \log(L)$ [1p]
dus $p = \log(0{,}014) = -1{,}85... \Rightarrow p \approx -1{,}9$ en $q = 4{,}5$. [1p]

3p **15** Voor volwassen karpers is G evenredig met $L^{3{,}13}$ dus een formule die dit verband weergeeft heeft de vorm $G = c \cdot L^{3{,}13}$ waarin c een evenredigheidsconstante is.
$L = 10$ invullen: $G = c \cdot 10^{3{,}13} = c \cdot 1348{,}9...$
$L = 94$ invullen: $G = c \cdot 94^{3{,}13} = c \cdot 1\,499\,305{,}6...$ [1p]
De verhouding tussen beide gewichten is $\frac{c \cdot 94^{3{,}13}}{c \cdot 10^{3{,}13}} = \frac{1\,499\,305{,}6...}{1348{,}9...} = 1111{,}4...$ [1p]
Een karper van 94 cm is ongeveer 1100 keer zo zwaar als een karper van 10 cm. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Exponentiële functie

3p **16** $f(x) = 241 \Leftrightarrow 3^{x-1} - 2 = 241 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 243$ [1p] $\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^5 \Leftrightarrow x - 1 = 5$ [1p]
dus $x = 6$ [1p]

4p **17** $g(x) = 3^x \xrightarrow{\text{6 omlaag}} 3^x - 6 \xrightarrow{\text{keer } \frac{1}{3} \text{ t.o.v. de } x\text{-as}} \frac{1}{3} \cdot (3^x - 6) = h(x)$ [2p]
h anders schrijven: $h(x) = \frac{1}{3} \cdot (3^x - 6) = \frac{1}{3} \cdot 3^x - 2 = 3^{-1} \cdot 3^x - 2$ [1p] $= 3^{x-1} - 2 = f(x)$ [1p]
dus h is dezelfde functie als f.

4p **18** Het punt (–20, 81) is na vermenigvuldiging met factor a ten opzichte van de x-as afkomstig van een punt op de grafiek van g dat ook y-coördinaat 81 heeft. [1p]
$g(x) = 81 \Leftrightarrow 3^x = 81$ [1p] $\Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$ dus het originele punt is (4, 81). [1p]
De x-coördinaat 4 is na vermenigvuldiging –20 geworden: $4 \cdot a = -20 \Rightarrow$
de factor a is –5. [1p]
andere manier
Als de grafiek van $g(x) = 3^x$ met a wordt vermenigvuldigd ten opzichte van de y-as dan heeft de formule van k de volgende vorm: $k(x) = 3^{\frac{1}{a} \cdot x}$. [1p]
Het punt $P(-20, 81)$ ligt op de grafiek van k dus:

$k(-20) = 81 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{a} \cdot -20} = 81$ [1p] $\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{a} \cdot -20} = 3^4 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot -20 = 4$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4}{-20} = \frac{1}{-5} \Rightarrow$

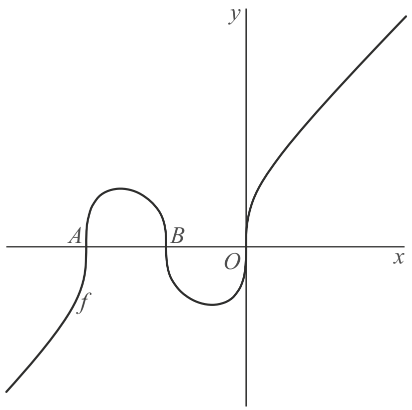
$a = -5$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Examen 2016-II

Drie snijpunten

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$. De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in de punten A, B en O. Zie de figuur.



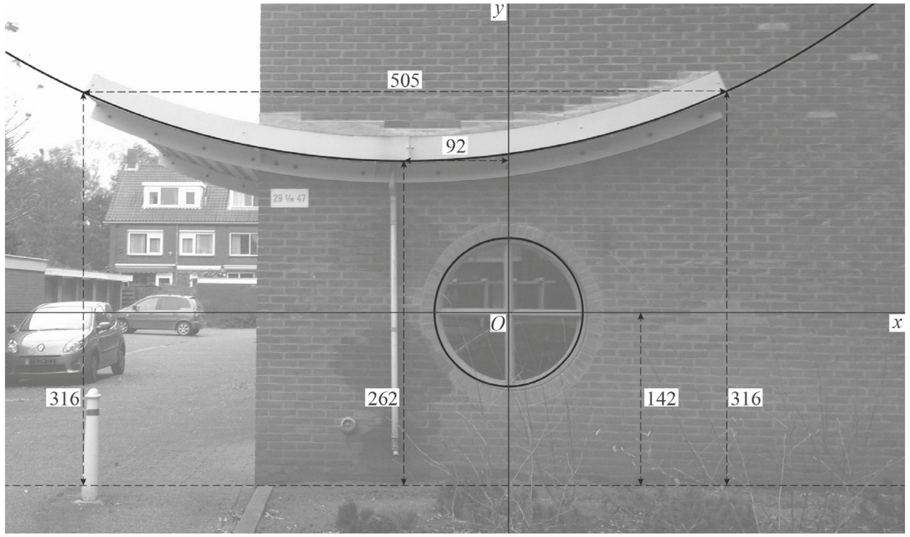
3p **1** Onderzoek of AB en BO even lang zijn.

Verder is gegeven de horizontale lijn l met vergelijking $y = p$. De grafiek van f snijdt l in drie punten.

4p **2** Bereken voor welke waarden van p dit het geval is. Rond de getallen in je antwoord af op drie decimalen.

Afdakje

In de zijgevel van een flat zit een cirkelvormig raam met daarboven een afdakje. De diameter van het raam is 120 cm. Het middelpunt van het raam zit op 142 cm boven de grond.
De uiteinden van het afdakje bevinden zich 316 cm boven de grond en liggen 505 cm uit elkaar. Het laagste punt van het afdakje bevindt zich 262 cm boven de grond en 92 cm links van het middelpunt van het raam.
Er wordt een assenstelsel aangebracht zodanig dat het middelpunt van het raam samenvalt met de oorsprong. De eenheden in dit assenstelsel zijn in cm. Zie de figuur, waarin bovendien een aantal maten is gegeven.



De onderrand van het afdakje heeft de vorm van een deel van een cirkel. Zie de figuur.

Uit de gegevens volgt dat de straal van deze cirkel afgerond op hele cm gelijk is aan 617 cm.

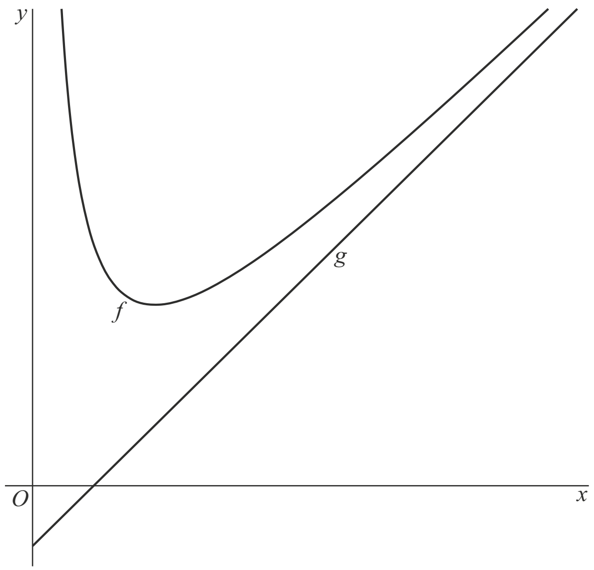
4p **3** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

4p **4** Bereken de afstand tussen het afdakje en het raam. Geef je antwoord in gehele cm nauwkeurig.

Dicht bij elkaar

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$ en $g(x) = x - 1$. Voor steeds groter wordende waarden van x komen de grafieken van f en g steeds dichter bij elkaar. Zie figuur 1.

figuur 1



Voor bepaalde waarden van x geldt: $f(x) - g(x) < \frac{1}{100}$

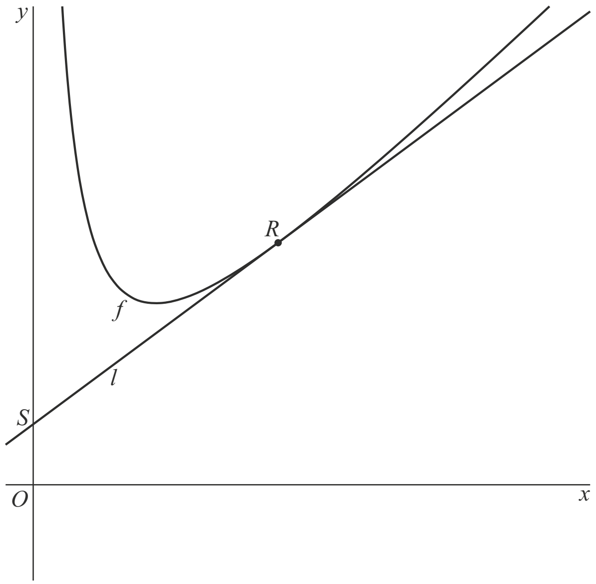
4p **5** Bereken exact voor welke waarden van x dit het geval is.

Ondanks dat de grafieken van f en g voor steeds groter wordende waarden van x steeds dichter bij elkaar komen, snijden ze elkaar niet.

4p **6** Toon op exacte wijze aan dat de grafieken van f en g elkaar niet snijden.

De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ raakt de grafiek van f in het punt R.
Het punt S is het snijpunt van l met de y-as. Zie figuur 2.

figuur 2



6p **7** Bereken exact de y-coördinaat van S.

Het punt T (2, 3) is de top van de grafiek van f.

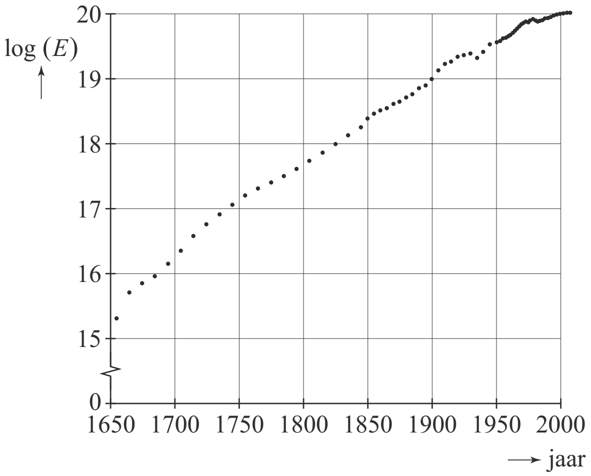
De grafiek van f wordt ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met een factor a. Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie h. Het punt P is de top van de grafiek van h. Er geldt $OP = 5$.

4p **8** Bereken exact de mogelijke waarden van a.

Energieverbruik

Sinds het begin van de industriële revolutie is het totale jaarlijkse energieverbruik in de Verenigde Staten (VS) nagenoeg exponentieel toegenomen.
E is het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar. In figuur 1 is voor een aantal jaren log(E) aangegeven.

figuur 1

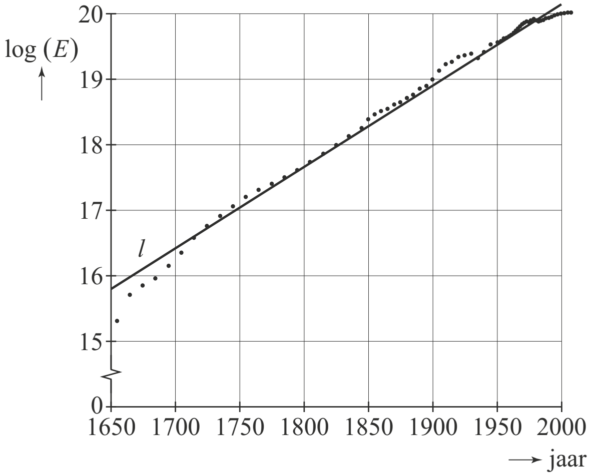


1 exajoule is gelijk aan 10^{18} joule.

4p **9** Bepaal met behulp van figuur 1 het totale energieverbruik in de VS in het jaar 1950 in hele exajoules nauwkeurig.
Licht je antwoord toe.

De punten in figuur 1 liggen bij benadering op een rechte lijn. Deze lijn l is in figuur 2 getekend.

figuur 2



Een formule voor lijn *l* is:

$\log(E) = 0{,}0125t + 15{,}8$

Hierin is *E* het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar en *t* het aantal jaren met $t = 0$ voor het jaar 1650.

3p **10** Bereken in welk jaar volgens de formule in de VS voor het eerst meer dan $3{,}0 \cdot 10^{20}$ joule aan energie zal worden verbruikt.

Een onderzoeker voorspelt dat het wereldwijde energieverbruik na 2010 exponentieel groeit, waarbij het elke honderd jaar tien keer zo hoog wordt.

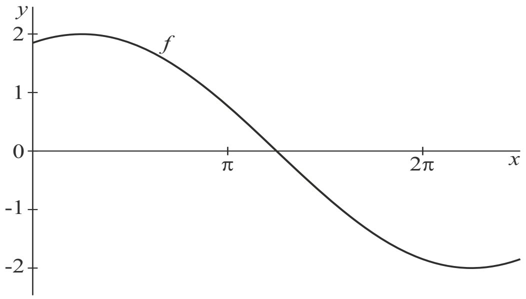
Op 1 januari 2010 was het wereldwijde energieverbruik $1{,}2 \cdot 10^{13}$ joule per seconde. De aarde ontvangt van de zon veel meer energie, maar liefst $1{,}7 \cdot 10^{17}$ joule per seconde. Als alle energie die de aarde van de zon ontvangt door de mens gebruikt zou kunnen worden, dan zouden we nu theoretisch gezien alleen met zonne-energie kunnen volstaan. Volgens bovengenoemde voorspelling zullen we in de toekomst op een gegeven moment toch meer energie verbruiken dan de aarde van de zon ontvangt.

4p **11** Bereken over hoeveel eeuwen dit volgens deze voorspelling het geval zal zijn.

Sinusoïden

Op het domein $[0, \frac{5}{2}\pi]$ is de functie *f* gegeven door $f(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi)$.
Zie figuur 1.

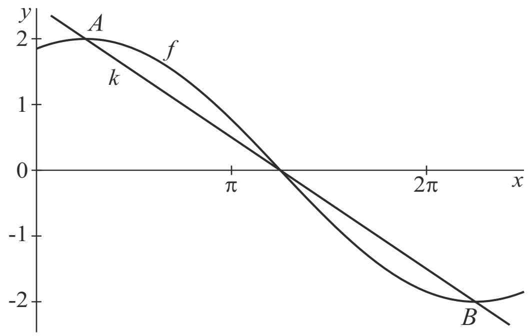
figuur 1



3p **12** Bereken exact de *x*-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van *f* met de *x*-as.

De punten *A* en *B* zijn de toppen van de grafiek van *f*. Lijn *k* gaat door *A* en *B*.
Zie figuur 2.

figuur 2



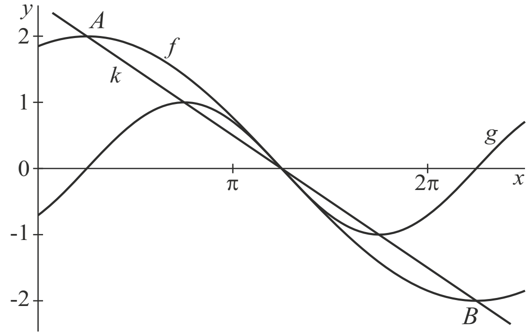
De coördinaten van *A* en *B* zijn $(\frac{1}{4}\pi, 2)$ en $(\frac{9}{4}\pi, -2)$.

Een vergelijking voor *k* is $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}$.

2p **13** Toon aan dat deze vergelijking voor *k* met behulp van de coördinaten van *A* en *B* opgesteld kan worden.

Op hetzelfde domein is de functie *g* gegeven door $g(x) = \sin(x - \frac{1}{4}\pi)$.
De toppen van de grafiek van *g* liggen ook op *k*. Zie figuur 3.

figuur 3

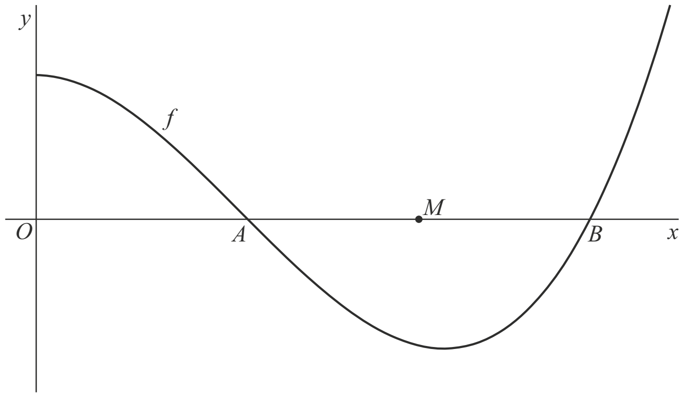


5p **14** Toon dit met exacte berekening aan.

Het midden en de top

De functie f is gegeven door $f(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 5)$. De grafiek van f snijdt de positieve x-as in de punten A en B. Het punt M is het midden van lijnstuk AB. Zie figuur 1.

figuur 1

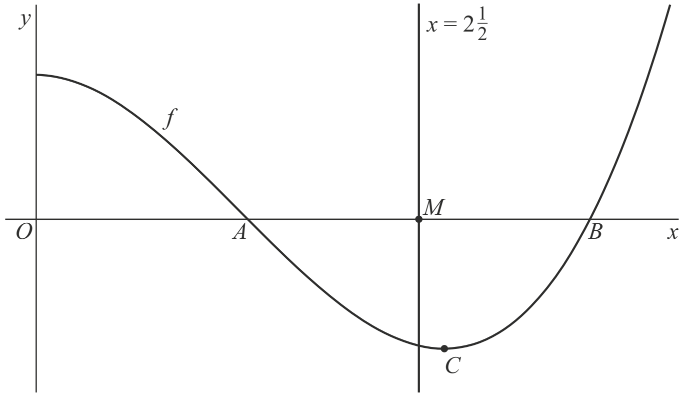


De x-coördinaat van M is gelijk aan $2\frac{1}{2}$.

4p **15** Toon dit met exacte berekening aan.

Het punt C is een top van de grafiek van f. De verticale lijn door M gaat niet door C. Zie figuur 2.

figuur 2

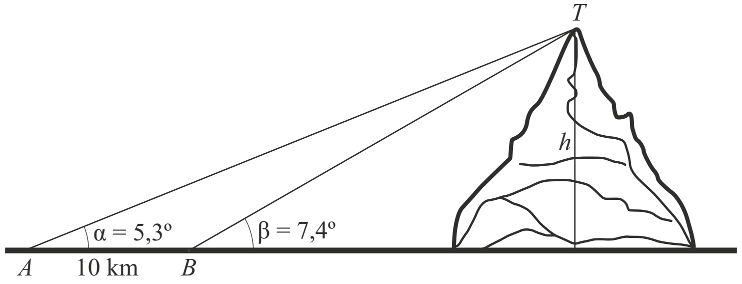


5p **16** Bereken exact het verschil tussen de x-coördinaten van M en C.

Monte Etna

De vulkaan Etna op Sicilië is vanaf de Middellandse Zee zichtbaar.

De hoogte van de Etna kan worden bepaald door middel van een zogeheten **driehoeksmeting**.
Vanaf een boot op zee wordt twee keer de hoek gemeten waaronder de top T van de Etna te zien is. Eerst wordt hoek $\alpha = 5{,}3°$ gemeten, vervolgens wordt 10 km in een rechte lijn richting de Etna gevaren en hoek $\beta = 7{,}4°$ gemeten. Zie de figuur, waarin ook de hoogte h van de top T ten opzichte van de Middellandse Zee is weergegeven. Deze figuur is niet op schaal.

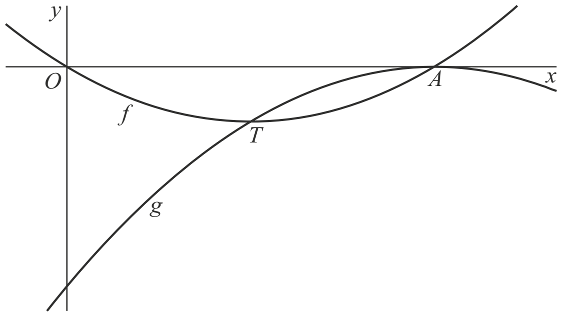


In dit model worden de kromming van de aarde en de ooghoogte van de waarnemer boven de zee verwaarloosd.

5p **17** Bereken de hoogte van de Etna ten opzichte van de Middellandse Zee. Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Twee parabolen

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 - 6x$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in het punt A.
De grafiek van de functie g raakt de x-as in A en gaat door de top T van de grafiek van f. Zie de figuur.



De grafiek van g is een parabool.

7p **18** Bepaal op exacte wijze een functievoorschrift voor g.

Hints bij examen 2016-II

1 A, B en O zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x-as, dus opgelost moet worden de vergelijking $f(x) = 0$.

2 De horizontale lijn l snijdt de grafiek van f in drie punten als l tussen de beide toppen doorloopt. De y-coördinaten van de toppen moeten dus worden bepaald. Dit mag met de grafische rekenmachine.

3 Maak een schets waarin de gevraagde straal goed herkenbaar is. Er zijn verschillende oplossingen mogelijk: een waarbij met de stelling van Pythagoras een vergelijking wordt opgesteld, maar ook een waarbij eerst een hoek wordt berekend.

4 De afstand tussen twee cirkels is gelijk aan de afstand tussen de beide middelpunten verminderd met de beide stralen.

5 Los eerst op: $f(x) - g(x) = \frac{1}{100}$

6 De grafieken van f en g snijden elkaar als $f(x) - g(x) = 0$ of als $f(x) = g(x)$.

7 Gebruik de afgeleide van f om een vergelijking van de lijn l op te stellen.

8 Bepaal eerst de coördinaten van P. Daarna Pythagoras om de lengte van OP te berekenen.

9 Lees de waarde van $\log(E)$ af in de figuur en bereken hiermee E.

10 Vul de gegeven waarde van E in de formule in en bereken t.

11 Stel een exponentiële formule op voor het wereldwijde energieverbruik.

12 Los op $f(x) = 0$.

13 Richtingscoëfficiënt $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en vul dan de coördinaten van A of B in in $y = ax + b$.

14 De grafiek van g is horizontaal verschoven vergeleken met de grafiek van de standaardfunctie $y = \sin(x)$. Bepaal deze verschuiving en gebruik dit gegeven om de toppen van g uit die van de standaardfunctie af te leiden.

15 Los op: $(x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0$

16 Gebruik de afgeleide van f om de x-coördinaat van C te bepalen.

17 Bereken de lengte van BT met de sinusregel in ΔABT.

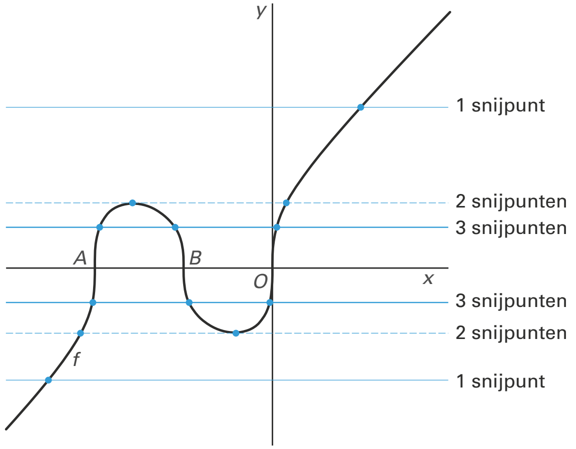
18 Bereken de coördinaten van A en gebruik de topformule van een parabool: $y = a(x - p)^2 + q$.

Uitwerkingen bij examen 2016-II

Drie snijpunten

3p **1** A, B en O zijn de snijpunten van de grafiek van f met de x-as, dus opgelost moet worden de vergelijking $f(x) = 0$.
$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x = 0$ of $x = -1$ of $x = -2$ dus de coördinaten zijn $A(-2, 0)$, $B(-1, 0)$ en $O(0, 0)$. [1p]
AB en BO zijn inderdaad even lang (namelijk 1). [1p]

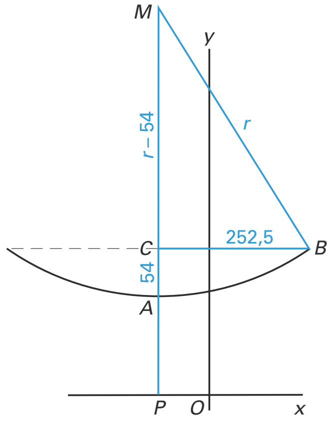
4p **2** Eerst de y-coördinaten van de toppen bepalen met de grafische rekenmachine.
Voer in de grafische rekenmachine in $y_1 = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x}$ en bepaal met de opties *maximum* en *minimum* de y-coördinaten van de toppen. [1p]
Hieronder zijn een paar voorbeelden van $y = p$ getekend met het aantal snijpunten.



Afgerond op drie decimalen geeft dit: de y-coördinaat van het maximum is 0,727 en de y-coördinaat van het minimum is –0,727. [1p]
Als p tussen –0,727 en 0,727 ligt, heeft de lijn l drie snijpunten met de grafiek van l. [1p]
Omdat 0,727 naar beneden is afgerond en –0,727 naar boven, kan het antwoord ook worden geschreven als $-0{,}727 \le p \le 0{,}727$. [1p]
Het correctievoorschrift nam ook genoegen met $-0{,}727 < p < 0{,}727$.

Afdakje

4p **3** Zie de schets (niet op schaal).
Noem het middelpunt van de cirkel M en de straal r.
Dan geldt $MA = MB = r$.
BC is de helft van 505, dus $BC = 252{,}5$ cm.
$AC = 316 - 262 = 54$ cm dus $MC = r - 54$. [1p]
Pythagoras in ΔBCM: $r^2 = 252{,}5^2 + (r - 54)^2$. [1p]
Deze vergelijking kan algebraïsch worden opgelost door haakjes uitwerken en herleiden:
$r^2 = 252{,}5^2 + (r - 54)^2 \Leftrightarrow$
$r^2 = 63\,756{,}25 + r^2 - 108r + 2916 \Leftrightarrow$
$108r = 66\,672{,}25 \Leftrightarrow$
$r = \frac{66\,672{,}25}{108}$ [1p] $= 617{,}3...$
De straal is afgerond 617 cm. [1p]



andere manier (rekenmachine instellen op graden)
$AC = 54$ en $BC = 252{,}5$ (zie vorige oplossing). [1p]

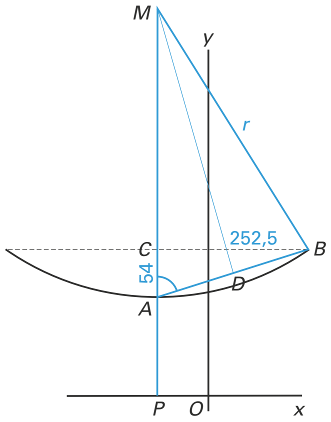
In ΔABC geldt:

$\tan(\angle BAC) = \frac{252{,}5}{54} \Rightarrow \angle BAC = 77{,}9...^\circ$ [1p]

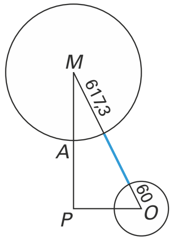
Omdat $MA = MB = r$ is ΔMAB gelijkbenig.
Het midden van AB noemen we D, dus dan is ΔMDA rechthoekig.
Pythagoras in ΔABC:
$AB^2 = 252{,}5^2 + 54^2 \Rightarrow AB = 258{,}2...$
dus $AD = 129{,}1...$ [1p]

In ΔMDA geldt: $\cos(\angle DAM) = \frac{AD}{MA} \Rightarrow$
$MA = \frac{AD}{\cos(\angle DAM)} = \frac{129{,}1...}{\cos(77{,}9...^\circ)} = 617{,}3...$

De straal is afgerond 617 cm. [1p]



4p **4** P is het punt op de x-as recht onder M.
Ook deze schets is niet op schaal.
$OP = 92$ en $MP = MA + AP = 617{,}3... + (262 - 142) = 737{,}3...$ [1p]
Pythagoras in ΔOPM:
$OM^2 = 92^2 + (737{,}3...)^2 = 552\,093{,}6...$ dus $OM = 743{,}0...$ [1p]
De straal van het raam is 60 [1p] dus de afstand tussen het afdakje en het raam is $743{,}0... - 617{,}3... - 60 = 65{,}6...$
Afgerond is de afstand 66 cm. [1p]



Dicht bij elkaar

4p **5** Eerst bepalen voor welke waarde van x geldt: $f(x) - g(x) = \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$\frac{x^2 - x + 4}{x} - (x - 1) = \frac{1}{100}$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} - x + 1 = \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$x - 1 + \frac{4}{x} - x + 1 = \frac{1}{100}$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{100}$ [1p] $\Leftrightarrow x = 400$

dus $f(x) - g(x) < \frac{1}{100}$ als $x > 400$. [1p]

4p **6** De grafieken van f en g snijden elkaar als $f(x) - g(x) = 0$. [1p]

Uit de vorige vraag volgt: $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 0$ [1p]

Als x steeds groter wordt, daalt de breuk $\frac{4}{x}$ steeds dichter naar nul maar de uitkomst zal nooit exact gelijk aan nul worden [1p], dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet. [1p]
andere manier
De grafieken van f en g snijden elkaar als $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$\frac{x^2 - x + 4}{x} = x - 1$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = x(x - 1)$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 - x + 4 = x^2 - x \Leftrightarrow 4 = 0$ [1p]

Deze laatste bewering is onwaar dus ook alle voorgaande beweringen zijn onwaar, dus de grafieken van f en g snijden elkaar niet. [1p]

6p **7** Eerst f herschrijven en differentiëren:

$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = x - 1 + 4x^{-1}$ [1p] $\Rightarrow f'(x) = 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$ [1p]

De afgeleide $f'(x)$ is $\frac{3}{4}$ als $1 - \frac{4}{x^2} = \frac{3}{4}$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{1}{4}$ [1p] $\Rightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ of $x = -4$

De oplossing $x = -4$ valt buiten het domein.

$f(4) = \frac{4^2 - 4 + 4}{4} = 4$ dus de coördinaten van R zijn (4, 4). [1p]

Punt $R(4, 4)$ ligt op de lijn $y = \frac{3}{4}x + b$ dus $4 = \frac{3}{4} \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow$

een vergelijking van lijn l is $y = \frac{3}{4}x + 1$. De y-coördinaat van S is 1. [1p]

4p **8** Als $T(2, 3)$ ten opzichte van de x-as wordt vermenigvuldigd met factor a, is het beeldpunt $P(2, 3a)$. [1p]
De lengte van OP volgt uit de stelling van Pythagoras: $OP = \sqrt{2^2 + (3a)^2} = \sqrt{4 + 9a^2}$

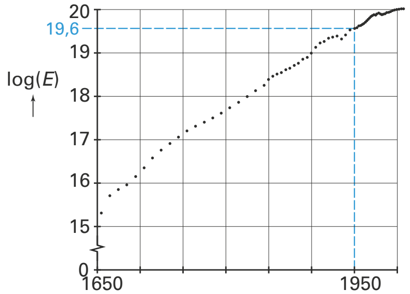
$OP = 5 \Leftrightarrow \sqrt{4 + 9a^2} = 5 \Rightarrow 4 + 9a^2 = 25$ [1p] $\Leftrightarrow 9a^2 = 21 \Leftrightarrow a^2 = \frac{21}{9}$ [1p]

Er zijn twee mogelijke waarden voor a, namelijk $a = \sqrt{\frac{21}{9}}$ en $a = -\sqrt{\frac{21}{9}}$ [1p]

De vorm $\sqrt{\frac{21}{9}}$ kan ook worden geschreven als $\frac{1}{3}\sqrt{21}$ of als $\sqrt{\frac{7}{3}}$ of als $\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

Energieverbruik

4p **9** Aflezen in de figuur: bij het punt van de grafiek dat bij 1950 hoort, is $\log(E) \approx 19{,}6$ [1p] $\Rightarrow$



[1p]

$E \approx 10^{19{,}6}$ [1p] $= 10^{1{,}6} \cdot 10^{18}$ joule $= 10^{1{,}6}$ exajoule $= 39{,}81...$ exajoule.
Afgerond 40 exajoule. [1p]

3p **10** $E = 3{,}0 \cdot 10^{20}$ invullen in de gegeven formule geeft $\log(3{,}0 \cdot 10^{20}) = 0{,}0125t + 15{,}8$ [1p]

$\Leftrightarrow 20{,}477... = 0{,}0125t + 15{,}8 \Leftrightarrow 4{,}677... = 0{,}0125t \Leftrightarrow t = \frac{4{,}677...}{0{,}0125} = 374{,}1...$ [1p]

Het zal méér dan 374 jaar duren voor het energieverbruik meer is dan $3{,}0 \cdot 10^{20}$ joule, dus dat is in 2025. [1p]

4p **11** De groeifactor van het wereldwijde energieverbruik per seconde is 10 per honderd jaar.
Het wereldwijde energieverbruik per seconde groeit dus volgens de formule:
$W = 1{,}2 \cdot 10^{13} \cdot 10^t$ waarin t in eeuwen vanaf 1 januari 2010
W is gelijk aan de totale hoeveelheid energie van de zon als geldt:

$1{,}2 \cdot 10^{13} \cdot 10^t = 1{,}7 \cdot 10^{17}$ [1p] $\Leftrightarrow 10^t = \frac{1{,}7 \cdot 10^{17}}{1{,}2 \cdot 10^{13}} \Leftrightarrow t = \log\left(\frac{1{,}7 \cdot 10^{17}}{1{,}2 \cdot 10^{13}}\right)$ [1p] $= 4{,}15\ldots$ [1p]

Dat is dus over ruim 4 eeuwen. [1p]

Sinusoïden

3p **12** De grafiek van f snijdt de x-as als $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ [1p] $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ [1p] $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$

$x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 4\pi$ of $x = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 4\pi$

De enige oplossing op het domein $[0, \frac{5}{2}\pi]$ is $x = \frac{5}{4}\pi$. [1p]

2p **13** De coördinaten van A en B zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 2\right)$ en $\left(\frac{9}{4}\pi, -2\right)$.

De richtingscoëfficiënt van de lijn door A en B is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-2}{\frac{9}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi} = \frac{-4}{2\pi} = \frac{-2}{\pi}$. [1p]

De coördinaten van $\left(\frac{1}{4}\pi, 2\right)$ invullen in $y = \frac{-2}{\pi}x + b$ geeft:

$2 = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1}{4}\pi + b \Leftrightarrow 2 = \frac{-2\pi}{4\pi} + b \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ [1p]

Een vergelijking van k is inderdaad $y = \frac{-2}{\pi}x + \frac{5}{2}$.

5p **14** De grafiek van $g(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$ is $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts geschoven vergeleken met de grafiek van de standaardfunctie $y = \sin(x)$. [1p]

De eerste twee toppen rechts van de y-as van $y = \sin(x)$ zijn $\left(\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$. [1p]

De toppen van g liggen $\frac{1}{4}\pi$ rechts hiervan dus dat zijn $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{3}{4}\pi, -1\right)$. [2p]

De coördinaten van $\left(\frac{3}{4}\pi, 1\right)$ invullen in $y = \frac{-2}{\pi}x + \frac{5}{2}$ geeft:

$1 = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-6\pi}{4\pi} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2}$ en dat klopt.

De coördinaten van $\left(1\frac{3}{4}\pi, -1\right)$ invullen in $y = \frac{-2}{\pi}x + \frac{5}{2}$ geeft:

$-1 = \frac{-2}{\pi} \cdot 1\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{7}{4}\pi + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 = \frac{-14\pi}{4\pi} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 = -\frac{2}{2}$ en

dat klopt ook. [1p]

De twee toppen van g liggen dus op de lijn k.

© ThiemeMeulenhoff

Het midden en de top

4p **15** De grafiek van f snijdt de x-as als $f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(x+1)(x^2 - 5x + 5) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ of $x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow$
$x = -1$ of $x^2 - 5x + 5 = 0$
De oplossing $x = -1$ past niet bij de punten A of B, dus verder met $x^2 - 5x + 5 = 0$. [1p]

abc-formule geeft: $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$ [1p] $= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$ dus

$x_A = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $x_B = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. [1p]

M is het midden van lijstuk AB dus

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{10}{2}\right)}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ [1p]

5p **16** Eerst f zonder haakjes schrijven, daarna differentiëren.
$f(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 5) = x^3 - 5x^2 + 5x + x^2 - 5x + 5 = x^3 - 4x^2 + 5$ [1p] $\Rightarrow$
$f'(x) = 3x^2 - 8x$ [1p]

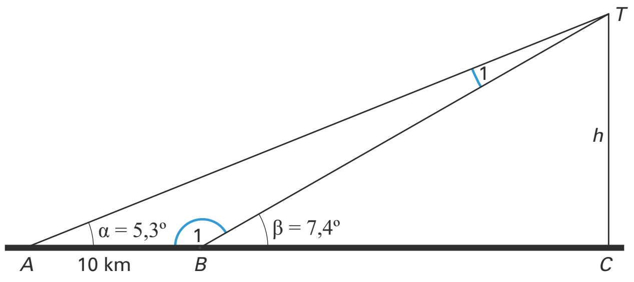
In top C is $f'(x) = 0$ dus $3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 8) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{8}{3}$ dus $x_c = \frac{8}{3}$. [1p]

Het verschil tussen de x-coördinaten van M en C is

$x_C - x_M = \frac{8}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} = \frac{16}{6} - \frac{15}{6} = \frac{1}{6}$ [1p]

Monte Etna

5p **17** *Rekenmachine instellen op graden.*



$\angle B_1 = 180 - 7{,}4 = 172{,}6° \Rightarrow \angle T_1 = 180 - 172{,}6 - 5{,}3 = 2{,}1°$ [1p]

Sinusregel in ΔABT:

$\frac{AB}{\sin(\angle T_1)} = \frac{BT}{\sin(\angle A)} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin(2{,}1°)} = \frac{BT}{\sin(5{,}3°)}$ [1p] $\Leftrightarrow BT = \frac{10 \cdot \sin(5{,}3°)}{\sin(2{,}1°)} = 25{,}2\ldots$ [1p]

In ΔBCT geldt: $\sin(7{,}4°) = \frac{CT}{BT} = \frac{CT}{25{,}2\ldots}$ [1p] $\Leftrightarrow CT = \sin(7{,}4°) \cdot 25{,}2\ldots$
$= 3{,}2466\ldots$ kilometer.

Afgerond op tientallen meters is de Etna 3250 meter hoog. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Twee parabolen

7p **18** De grafiek van f snijdt de x-as als $f(x) = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x = 0$ of $x = 6$ dus de coördinaten van A zijn (6, 0).
[1p]
De top T kan worden berekend met de afgeleide: $f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$
$f'(x) = 2x - 6 = 0$ als $x = 3$. [1p]
Invullen: $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9$ dus $T(3, -9)$ [1p]
Als $A(6, 0)$ de top is van g, is $g(x) = a(x-6)^2$ [1p] een mogelijk functievoorschrift van g.
Hierin de coördinaten van $T(3, -9)$ invullen:
$-9 = a(3-6)^2 \Leftrightarrow -9 = a \cdot 9 \Leftrightarrow a = -1$ [1p]
Dit geeft het functievoorschrift $g(x) = -(x-6)^2$. [1p]

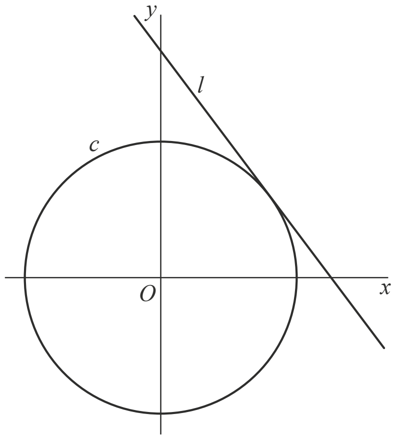
© ThiemeMeulenhoff

Examen 2017-I

Cirkel en lijn

De cirkel c en de lijn l worden gegeven door $c : x^2 + y^2 = 9$ en
$l : y = -\frac{4}{3}x + 5$. Zie figuur 1.

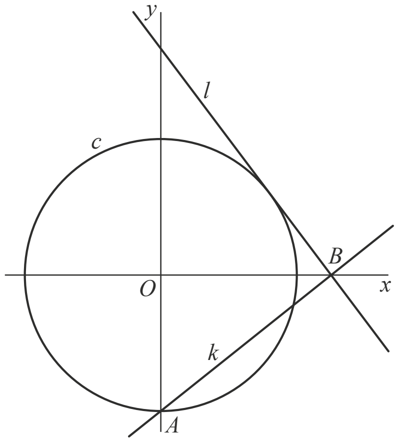
figuur 1



4p **1** Toon aan dat l raakt aan c.

Cirkel c snijdt de negatieve y-as in het punt A. Lijn l snijdt de x-as in het punt B. De lijn k is de lijn door A en B. Zie figuur 2.

figuur 2



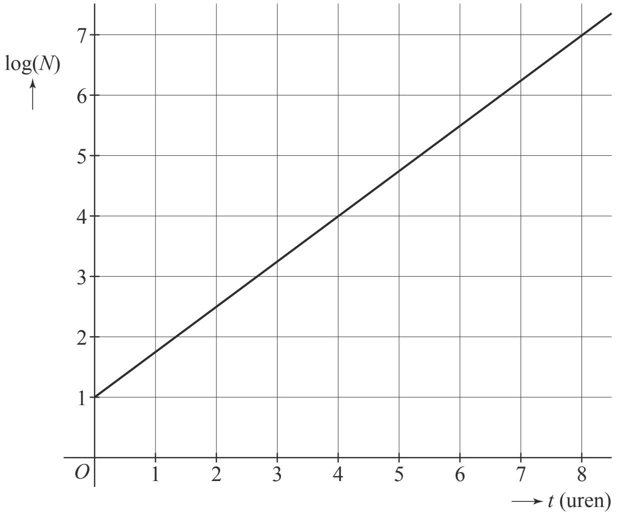
Lijnen k en l lijken elkaar loodrecht te snijden.
6p **2** Onderzoek of dit het geval is.

Experimenteren met bacteriën

Wanneer men bij een experiment bepaalde bacteriën in een reageerbuis plaatst en voldoende voeding toedient, neemt het aantal bacteriën in de reageerbuis exponentieel toe.

Van zo'n experiment is in figuur 1 log(*N*) uitgezet tegen *t*. Hierin is *N* het aantal bacteriën in de reageerbuis en *t* de tijd in uren.

figuur 1



In figuur 1 is af te lezen dat aan het begin van het experiment geldt dat log(*N*) = 1 en dat na 8 uur geldt dat log(*N*) = 7.
Uit het verband in figuur 1 volgt dat het aantal bacteriën in de reageerbuis tijdens het experiment met ongeveer 3% per minuut toeneemt.

4p **3** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

3p **4** Bereken in hoeveel minuten het aantal bacteriën in de reageerbuis verdubbelt. Rond je eindantwoord af op hele minuten.

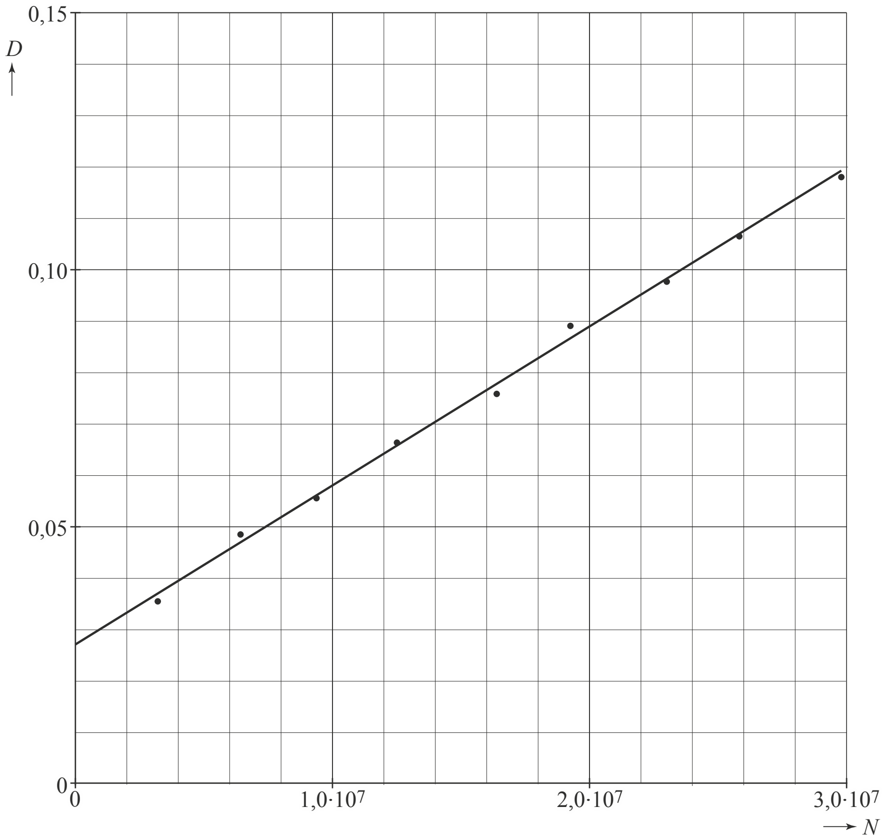
Om het aantal bacteriën in een reageerbuis te bepalen meet men het percentage doorgelaten licht. Er bestaat een verband tussen het percentage licht dat door een reageerbuis met bacteriën wordt doorgelaten en de zogeheten **optische dichtheid**. Dit verband wordt gegeven door de formule:

$L = 100 \cdot 10^{-D}$

Hierin is *L* het percentage doorgelaten licht en *D* de optische dichtheid.

Verder heeft men op basis van eerdere experimenten het verband tussen de optische dichtheid *D* en het aantal bacteriën in de reageerbuis *N* gevonden. Dit verband is weergegeven in figuur 2.

figuur 2



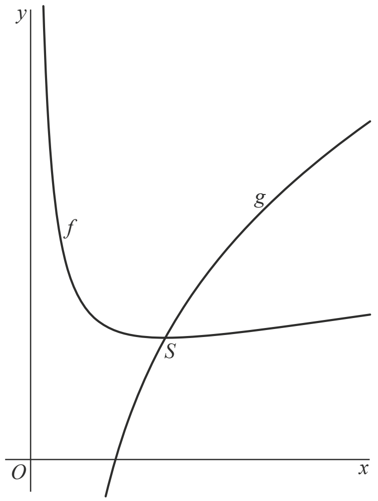
Tijdens een experiment laat een reageerbuis met bacteriën 84% van het licht door.

4p **5** Bepaal het aantal bacteriën in de reageerbuis. Geef je antwoord in miljoenen nauwkeurig en licht je antwoord toe. Maak daarbij gebruik van figuur 2.

Twee functies met een wortel

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ en $g(x) = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x}$.

Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g. Zie de figuur.



De grafiek van f heeft één top. Dit blijkt punt S te zijn.

8p **6** Bewijs dat S een top is van de grafiek van f.

Speerwerpen

Een bekend onderdeel van de atletiek is het speerwerpen.

De baan van een speer is een deel van een parabool. In deze opgave verwaarlozen we de luchtweerstand, de lengte van de speer en de hoogte waarop de speer wordt losgelaten.

De baan van de speer kan worden beschreven met de volgende formules:

$$h = 0{,}707 \cdot b \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$d = 0{,}707 \cdot b \cdot t \qquad (2)$$

Hierbij is:
- t de tijd die de speer in de lucht is in seconden;
- b de beginsnelheid waarmee de speer geworpen wordt in m/s;
- h de hoogte van de speer in m op tijdstip t;
- d de horizontaal afgelegde afstand van de speer in m op tijdstip t.

Door in formule (1) h gelijk te stellen aan 0, is uit te rekenen na hoeveel seconden de speer op de grond komt. Hiermee is vervolgens met behulp van formule (2) de totaal horizontaal afgelegde afstand van de speer uit te rekenen.

Een speerwerper gooit een speer met een beginsnelheid van 25 m/s.

4p **7** Bereken hoe ver de speer volgens de formules gegooid wordt. Geef je antwoord in hele meters nauwkeurig.

Uit formule (2) volgt:

$$t = \frac{d}{0{,}707 \cdot b} \qquad (3)$$

Door formule (3) te substitueren in formule (1) kan worden aangetoond dat (bij benadering) geldt:

$$h = d - \frac{9{,}8}{b^2} \cdot d^2 \qquad (4)$$

4p **8** Toon dit laatste op algebraïsche wijze aan.

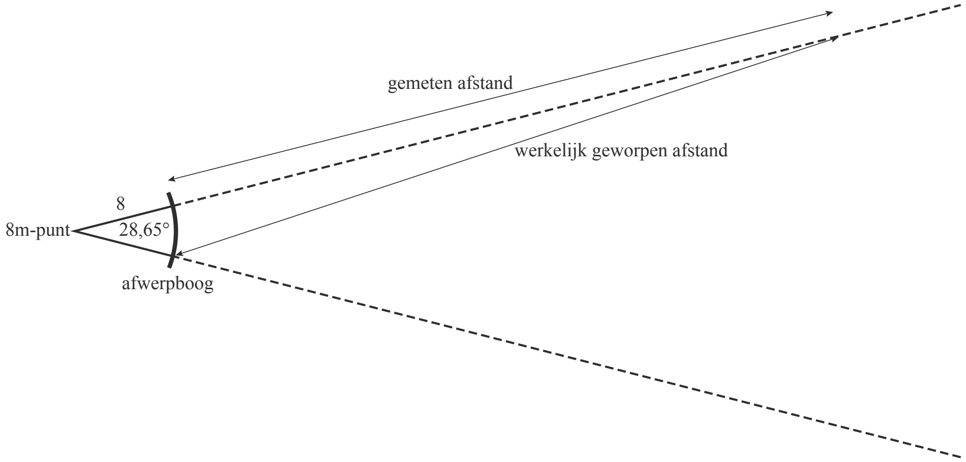
Volgens de formules werd de speer bij het vestigen van het wereldrecord voor mannen in 1996 met een snelheid van 31,1 m/s geworpen.

4p **9** Bereken algebraïsch de maximale hoogte die de speer volgens de formules bereikt zou hebben tijdens dit wereldrecord. Geef je antwoord in hele meters nauwkeurig.

Een atleet gooit de speer vanaf de **afwerpboog**. Dit is een deel van de cirkel met het zogeheten 8m-punt als middelpunt en een straal van 8 meter. De speer moet landen in het gebied binnen twee lijnen die een hoek van 28,65° met elkaar maken. Deze twee lijnen snijden elkaar in het 8m-punt.

De **gemeten afstand** wordt als volgt gemeten:
- trek een rechte lijn vanaf de plek waar de speer landt tot het 8m-punt;
- de lengte van het deel van deze lijn van de plek waar de speer landt tot de afwerpboog, is de gemeten afstand.

Door deze manier van meten kan het voorkomen dat er een verschil is tussen de werkelijk geworpen afstand en de gemeten afstand.
In de figuur staat hiervan een bovenaanzicht.



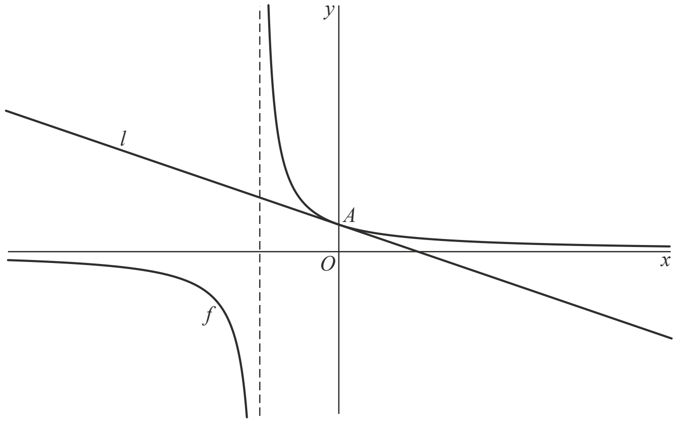
De winnaar van het speerwerpen bij de mannen op de Olympische Spelen van 2012 won met een gemeten afstand van 84,58 meter. Als hij zou hebben geworpen volgens de situatie in de figuur, dan zou zijn werkelijk geworpen afstand groter zijn geweest.

4p **10** Bereken in hele centimeters nauwkeurig het verschil tussen de gemeten afstand en de werkelijk geworpen afstand in deze situatie.

Gebroken functies

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x+3}$. De grafiek van f heeft een snijpunt A met de y-as. De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in A. Zie figuur 1.

figuur 1



Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$.

4p **11** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

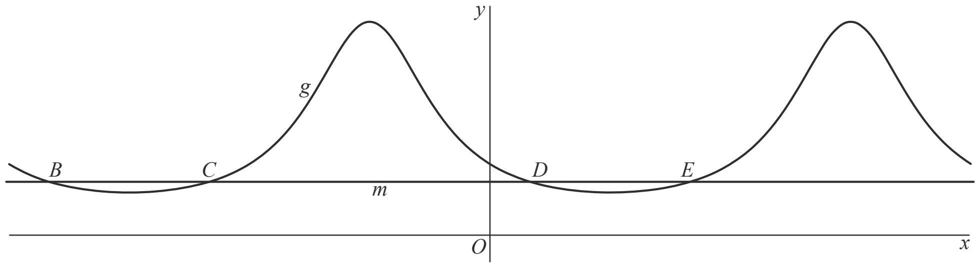
6p **12** Bereken exact de afstand van l tot de oorsprong.

De functie g is gegeven door $g(x) = \frac{1}{2\sin(x)+3}$.

De lijn m is gegeven door $y = \frac{1}{4}$.

Op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ snijdt m de grafiek van g achtereenvolgens in de punten B, C, D en E. Zie figuur 2.

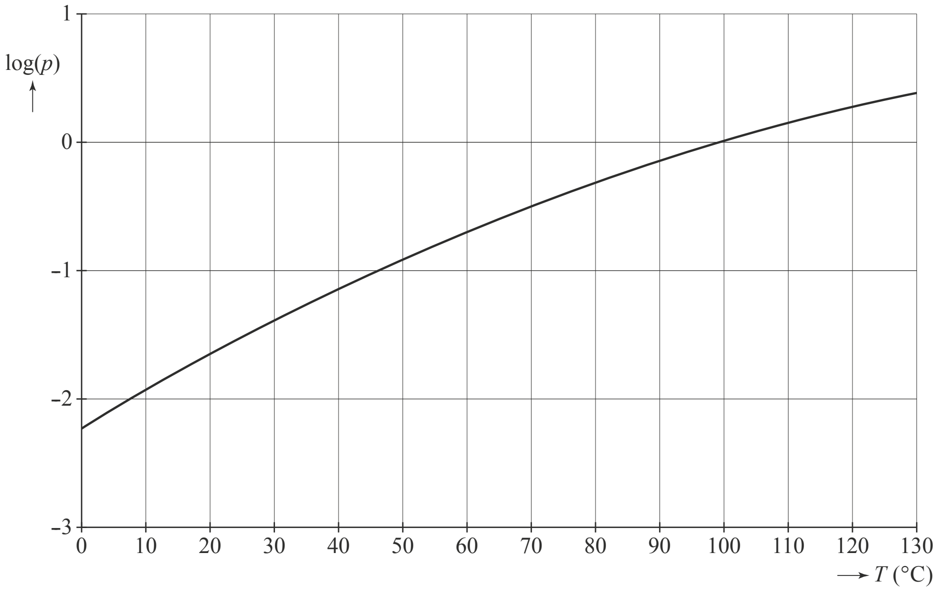
figuur 2



5p **13** Bereken exact de afstand tussen B en E.

Kookpunt van water

Het kookpunt van water is de temperatuur waarbij water gaat koken.
Het kookpunt T is afhankelijk van de luchtdruk p met p in bar en T in °C.
In de figuur is het verband tussen log(p) en T weergegeven.



Onder normale omstandigheden is de luchtdruk op zeeniveau 1,0 bar en is het kookpunt van water bij deze luchtdruk 100 °C.

Op de top van Mount Everest is de luchtdruk 0,31 bar. Hierdoor is het kookpunt van water op de top van Mount Everest een stuk lager dan op zeeniveau.

3p **14** Onderzoek met behulp van de figuur bij welke temperatuur water op de top van Mount Everest gaat koken. Geef je antwoord in hele °C nauwkeurig.

Het verband dat in de figuur is weergegeven, kan benaderd worden met de formule:

$$\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273 + T}$$

Hierin is p de luchtdruk in bar en T het kookpunt van water in °C.

Op zeeniveau, bij een luchtdruk van 1,0 bar, kookt rijst in water bij een temperatuur van 100 °C. Als de rijst in een hogedrukpan wordt bereid onder dezelfde omstandigheden, maar bij een temperatuur van 130 °C, is de rijst sneller gaar als gevolg van de hogere druk.

3p **15** Bereken de druk in bar in een hogedrukpan als de rijst aan het koken is. Geef je antwoord in bar in één decimaal nauwkeurig.

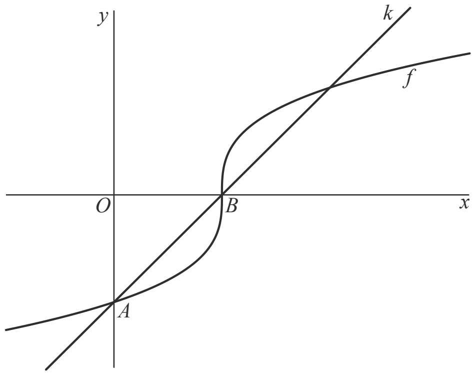
In de gegeven formule is log(p) uitgedrukt in T.

3p **16** Druk T uit in p.

Derdemachtswortel

De functie f is gegeven door $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27}$.
De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A en de x-as in het punt B. De lijn k gaat door A en B. Zie figuur 1.

figuur 1

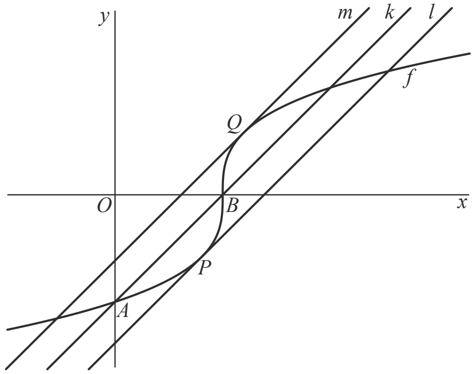


De richtingscoëfficiënt van k is 1.

4p **17** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De lijnen l en m zijn de twee raaklijnen aan de grafiek van f die evenwijdig zijn aan lijn k. l raakt de grafiek van f in het punt P en m raakt de grafiek van f in het punt Q. Zie figuur 2.

figuur 2



6p **18** Bereken met behulp van differentiëren de x-coördinaten van P en Q. Rond je antwoorden af op twee decimalen.

Hints bij examen 2017-I

1. Substitueer de formule van *l* in de cirkelformule. Als de vergelijking die je dan krijgt slechts één oplossing heeft, dan raakt *l* aan *c*.
2. Gebruik de stelling: *k* snijdt *l* loodrecht ⇔ $rc_k \cdot rc_l = -1$.
   Het is ook mogelijk de hoek tussen de beide lijnen te berekenen.
3. Lees bij twee verschillende waarden van *t* de bijbehorende waarden van log(*N*) af en bereken hiermee *N*. Nu kan de groeifactor worden berekend. Reken de groeifactor om naar minuten.
4. Het aantal bacteriën verdubbelt bij groeifactor 2.
5. Bereken met behulp van de formule welke waarde van *D* hoort bij 84%. Vervolgens *N* aflezen in de figuur.
6. Het is voldoende om aan te tonen dat punt *S* en de top dezelfde *x*-coördinaat hebben.
7. Bereken *t* met behulp van formule (1) door *h* en *b* in te vullen. Bereken daarna *d* met formule (2).
8. Gebruik onder andere $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$
9. Vul $b = 31{,}1$ in de formule van *h* in en bereken het maximum van *h* bijvoorbeeld met de afgeleide.
10. Gebruik de cosinusregel.
11. *l* heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$. Bereken *a* en *b* en vergelijk de gevonden uitkomsten met de gegeven vergelijking.
12. Stel de vergelijking op van een lijn *k* loodrecht op *l*. Bereken de coördinaten van het snijpunt van *k* en *l* en bereken de afstand van dit snijpunt tot (0, 0).
13. Stel een vergelijking op en bereken hiermee de x-coördinaten van *B* en *E*.
14. Bereken log(*p*) bij de gegeven waarde van *p*. Lees in de figuur de waarde van *T* af.
15. $\log(a) = b \Leftrightarrow a = 10^b$
16. Maak de breuk vrij en gebruik de regel: $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow \frac{A}{C} = B$ (mits *B* en *C* beide ongelijk aan 0 zijn).
17. Gebruik de coördinaten van de punten *A* en *B* om de richtingscoëfficiënt van *k* te berekenen.
18. Schrijf $f(x)$ als een macht om te kunnen differentiëren met de kettingregel.
    De afgeleide van *f* in de punten *P* en *Q* is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van *k*.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-I

Cirkel en lijn

4p **1** Substitutie van $y = -\frac{4}{3}x + 5$ in de cirkelformule geeft:

$x^2 + (-\frac{4}{3}x + 5)^2 = 9$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 25 = 9 \Leftrightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 16 = 0$ [1p]

Vermenigvuldigen met 9 geeft: $25x^2 - 120x + 144 = 0$

Discriminant $D = (-120)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 144 = 0$ [1p] $\Rightarrow$ *l* en *c* hebben maar één punt gemeenschappelijk dus *l* raakt aan *c*. [1p]

Een aanpak met de rekenmachine werkt niet omdat de rekenmachine geen onderscheid kan maken tussen één snijpunt en twee zeer dicht bij elkaar liggende snijpunten.

6p **2** $x = 0$ invullen in $c \Rightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3$ of $y = -3$ dus $A(0, -3)$. [1p]

$y = 0$ invullen in $l \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}x + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$ dus $B(\frac{15}{4}, 0)$. [1p]

k gaat door *A* en *B* dus de richtingscoëfficiënt van *k* is $\frac{0-(-3)}{\frac{15}{4}-0} = \frac{3}{\frac{15}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$. [1p]

$rc_k \cdot rc_l = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{15} \neq -1$ [2p] dus *k* en *l* snijden elkaar niet loodrecht. [1p]

andere manier

$x = 0$ invullen in $c \Rightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3$ of $y = -3$ dus $A(0, -3)$. [1p]

m is een lijn door punt *A* en loodrecht op *l*.

Dan geldt: $rc_m \cdot rc_l = -1 \Leftrightarrow rc_m \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow rc_m = \frac{3}{4}$ [2p]

De lijn *m* door punt $A(0, -3)$ en loodrecht op *l* heeft dus vergelijking $y = \frac{3}{4}x - 3$. [1p]

$y = 0$ invullen in $l \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}x + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$ dus $B(\frac{15}{4}, 0)$. [1p]

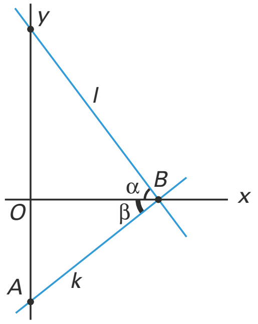
Punt $B(\frac{15}{4}, 0)$ ligt niet op lijn *m* want $\frac{15}{4} \neq \frac{3}{4} \cdot 0 - 3$ dus de lijnen *m* en *k* zijn verschillend. *m* snijdt lijn *l* loodrecht, dus *k* snijdt lijn *l* niet loodrecht. [1p]

nog een andere manier (rekenmachine instellen op graden)

$x = 0$ invullen in $c \Rightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = 3$ of $y = -3$ dus $A(0, -3)$. [1p]

$y = 0$ invullen in $l \Rightarrow 0 = -\frac{4}{3}x + 5 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4}$ dus $B(\frac{15}{4}, 0)$. [1p]

k gaat door *A* en *B* dus de richtingscoëfficiënt van *k* is $\frac{0-(-3)}{\frac{15}{4}-0} = \frac{3}{\frac{15}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{15} = \frac{4}{5}$. [1p]



$rc_k = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan(\beta) = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = 38{,}65...^\circ$ [1p]

$rc_l = -\frac{4}{3} \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53{,}13...^\circ$ [1p]

$\alpha + \beta = 53{,}13...^\circ + 38{,}65...^\circ \approx 91{,}8^\circ$ dus *k* en *l* snijden elkaar niet loodrecht. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Experimenteren met bacteriën

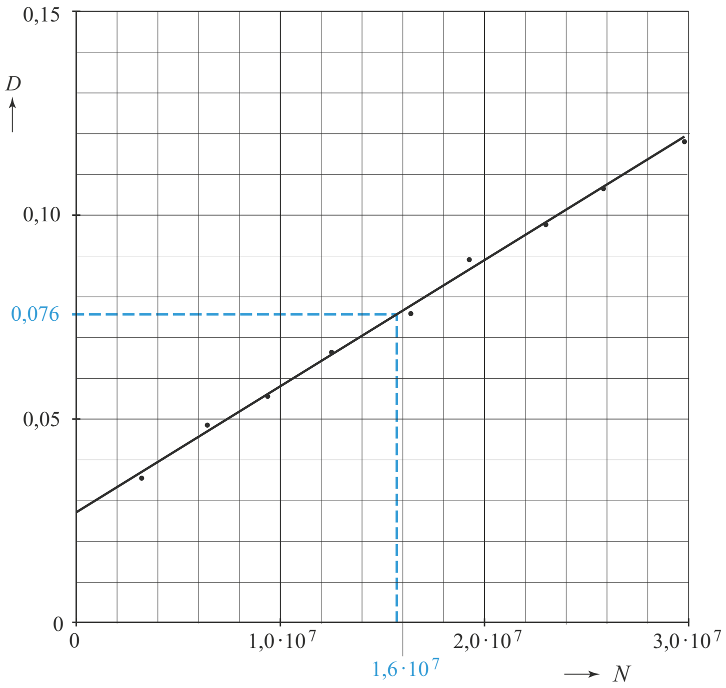
4p **3** Aflezen in figuur 1:
bij $t = 0$ hoort $\log(N) = 1 \Leftrightarrow N = 10^1 = 10$
bij $t = 8$ hoort $\log(N) = 7 \Leftrightarrow N = 10^7 = 10\,000\,000$ [1p]

De groeifactor per 8 uur is $\frac{10^7}{10} = 10^6$. [1p]

Er zitten 480 minuten in 8 uur dus de groeifactor per minuut is $(10^6)^{\frac{1}{480}}$ [1p] = 1,0292...
dus per minuut neemt het aantal bacteriën met 2,92...% toe.
Afgerond op één decimaal: 2,9%. [1p]

3p **4** Het aantal bacteriën verdubbelt bij groeifactor 2.
$1{,}03^t = 2$ [1p] $\Leftrightarrow t = {}^{1{,}03}\log(2)$ [1p] $= 23{,}4...$
Afgerond is de verdubbelingstijd 23 minuten. [1p]
andere manier (doorrekenen met de groeifactor 1,0292... van de vorige vraag)
$(1{,}0292...)^t = 2$ [1p] $\Leftrightarrow t = {}^{1{,}0292...}\log(2)$ [1p] $= 24{,}08...$
Afgerond is de verdubbelingstijd 24 minuten. [1p]
Beide antwoorden worden goed gerekend.

4p **5** De reageerbuis laat 84% van het licht door dus $L = 84$.
$84 = 100 \cdot 10^{-D}$ [1p] $\Leftrightarrow 10^{-D} = 0{,}84 \Leftrightarrow -D = {}^{10}\log(0{,}84)$ [1p] $\Leftrightarrow D = -{}^{10}\log(0{,}84)$
$= 0{,}0757...$ [1p]



Aflezen in de figuur bij $D \approx 0{,}076$ geeft $N \approx 1{,}58 \cdot 10^7$ dus afgerond ongeveer 16 miljoen bacteriën. [1p]

Twee functies met een wortel

8p **6** De grafieken snijden elkaar als: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{x} = 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 2\sqrt{x}$ [1p]
Kwadrateren: $\left(\frac{4}{x}\right)^2 = (2\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow \frac{16}{x^2} = 4x$ [1p] $\Rightarrow 4x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$ dus
de x-coördinaat van S is $\sqrt[3]{4}$. [1p]
Top van f zoeken met behulp van de afgeleide van f:

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ [2p] $= 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2}$ [1p] $\Rightarrow 2\sqrt{x} = x^2$ en nu kwadrateren: $(2\sqrt{x})^2 = (x^2)^2 \Leftrightarrow 4x = x^4$ [1p] $\Leftrightarrow$

$4 = x^3$ of $x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$ of $x = 0$ maar $x = 0$ voldoet niet, dus $x_{top} = \sqrt[3]{4}$. [1p]
De x-coördinaat van het snijpunt S is gelijk aan de x-coördinaat van de top van f dus S is ook een top van de grafiek van f.
andere manier
Bereken $x_S = \sqrt[3]{4}$ en $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ zoals hierboven. [5p]
Nu nagaan of het snijpunt S ook een top van f is, dus of $f'(\sqrt[3]{4}) = 0$:

$f'(\sqrt[3]{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt[3]{4}}} - \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^2}$ [1p] $= \frac{1}{2\sqrt{4^{\frac{1}{3}}}} - \frac{1}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{1}{2\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}}$ [1p] $= \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}\left(4^{\frac{1}{6}}\right)} - \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}}$

$\frac{1}{4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}} - \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} = 0$ [1p] dus snijpunt S is ook een top van f.

Speerwerpen

4p **7** $h = 0$ en beginsnelheid $b = 25$ invullen in formule (1):
$0 = 0{,}707 \cdot 25 \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2$ [1p] $\Leftrightarrow 0 = 17{,}675 \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2 \Leftrightarrow 0 = t \cdot (17{,}675 - 4{,}91t)$ [1p]

$\Leftrightarrow t = 0$ of $17{,}675 - 4{,}91t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = \frac{17{,}675}{4{,}91} = 3{,}599...$ [1p]

dus na 3,599... sec komt de speer op de grond.
Nu $b = 25$ en $t = 3{,}599...$ invullen in formule (2):
$d = 0{,}707 \cdot 25 \cdot 3{,}599... = 63{,}626...$
Afgerond op hele meters komt de speer 64 meter ver. [1p]

4p **8** $t = \frac{d}{0{,}707 \cdot b}$ substitueren in $h = 0{,}707 \cdot b \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2$ geeft:

$h = 0{,}707 \cdot b \cdot \frac{d}{0{,}707 \cdot b} - 4{,}91 \cdot \left(\frac{d}{0{,}707 \cdot b}\right)^2$ [1p] $\Leftrightarrow$

$h = \frac{0{,}707 \cdot b \cdot d}{0{,}707 \cdot b} - 4{,}91 \cdot \frac{d^2}{0{,}707^2 \cdot b^2}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$h = d - \frac{4{,}91}{0{,}707^2} \cdot \frac{d^2}{b^2}$ [1p] $\Leftrightarrow h = d - 9{,}82... \cdot \frac{d^2}{b^2} \Leftrightarrow h = d - \frac{9{,}82...}{b^2} \cdot d^2$

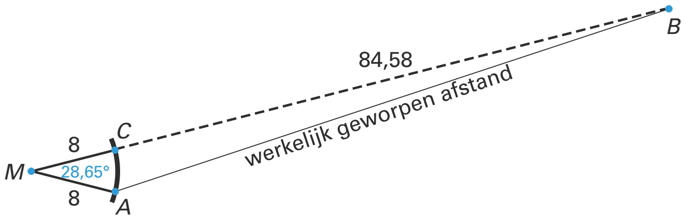
dus bij benadering geldt $h = d - \frac{9{,}8}{b^2} \cdot d^2$ [1p]

4p **9** De beginsnelheid b bij het wereldrecord was 31,1 m/s.
$h = 0{,}707 \cdot 31{,}1 \cdot t - 4{,}91 \cdot t^2$ [1p] $\Leftrightarrow h = 21{,}9877t - 4{,}91t^2$
De hoogte h is maximaal als $h' = 0$ dus als

$h' = 21{,}9877 - 9{,}82t = 0$ [1p] $\Leftrightarrow t = \frac{21{,}9877}{9{,}82} = 2{,}239...$ [1p]

Deze waarde van t invullen: $h = 21{,}9877 \cdot (2{,}39...) - 4{,}91 \cdot (2{,}39...)^2 = 24{,}61...$
Afgerond op hele meters kwam de speer 25 meter hoog. [1p]

4p **10** *Rekenmachine instellen op graden*



$MB = MC + BC = 8 + 84{,}58 = 92{,}58$ meter. [1p]
Cosinusregel in ΔMAB:
$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos(\angle AMB) \Leftrightarrow$
$AB^2 = 8^2 + 92{,}58^2 - 2 \cdot 8 \cdot 92{,}58 \cdot \cos(28{,}65°)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$AB^2 = 7335{,}13... \Rightarrow AB = 85{,}645... \approx 85{,}65$ meter. [1p]
Het verschil tussen de gemeten en de werkelijk geworpen afstand is in deze situatie
$85{,}65 - 84{,}58 = 1{,}07$ meter, dus 107 cm. [1p]

Gebroken functies

4p **11** Raaklijn l heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.

$f(0) = \frac{1}{2 \cdot 0 + 3} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ [1p]

Om de afgeleide van f te kunnen bepalen eerst f herschrijven:

$f(x) = \frac{1}{2x + 3} = (2x + 3)^{-1}$ [1p]

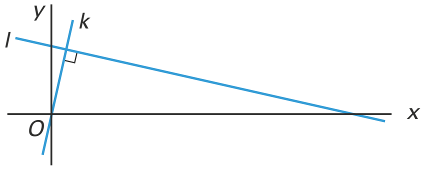
Differentiëren met de kettingregel:

$f'(x) = -1 \cdot (2x + 3)^{-2} \cdot 2 = -2 \cdot \frac{1}{(2x + 3)^2} = -\frac{2}{(2x + 3)^2}$ [1p]

dus $a = f'(0) = -\frac{2}{(2 \cdot 0 + 3)^2} = -\frac{2}{9}$ [1p]

Inderdaad is $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ een vergelijking van raaklijn l.

6p **12** k is een lijn door de oorsprong die loodrecht staat op lijn l, dus k heeft een vergelijking van de vorm $y = px$.



$k \perp l \Leftrightarrow rc_k \cdot rc_l = -1 \Leftrightarrow p \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$ dus een vergelijking van k is $y = \frac{9}{2}x$. [1p]

k en l snijden elkaar als $\frac{9}{2}x = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ [1p] $\Leftrightarrow$ (*vermenigvuldig met 18*)

$81x = -4x + 6 \Leftrightarrow 85x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{85}$ [1p] dus $y = \frac{9}{2} \cdot \frac{6}{85} = \frac{27}{85}$

De coördinaten van het snijpunt van k en l zijn $\left(\frac{6}{85}, \frac{27}{85}\right)$. [1p]

De exacte afstand van dit snijpunt tot de oorsprong is

$\sqrt{\left(\frac{6}{85}\right)^2 + \left(\frac{27}{85}\right)^2}$ [1p] $= \sqrt{\frac{36}{7225} + \frac{729}{7225}} = \sqrt{\frac{765}{7225}}$ [1p]

Het antwoord kan (maar hoeft niet) worden herleid:

$\sqrt{\frac{765}{7225}} = \frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{85}}{\sqrt{85^2}} = \frac{3}{85}\sqrt{85}$

5p **13** Lijn m snijdt de grafiek van g als geldt:

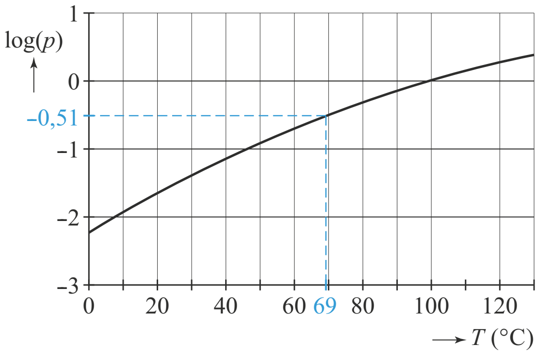
$\frac{1}{2\sin(x) + 3} = \frac{1}{4}$ [1p] $\Leftrightarrow 2\sin(x) + 3 = 4 \Leftrightarrow 2\sin(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$ [1p] $\Rightarrow x = \frac{1}{6}\pi$

Overige oplossingen op $[-2\pi, 2\pi]$ zijn $x = \frac{5}{6}\pi,\ x = -1\frac{1}{6}\pi$ en $x = -1\frac{5}{6}\pi$. [1p]

De exacte afstand tussen B en E is $x_E - x_B = \frac{5}{6}\pi - \left(-1\frac{5}{6}\pi\right)$ [1p] $= 1\frac{10}{6}\pi = 2\frac{2}{3}\pi$ [1p]

Kookpunt van water

3p **14** Op de top van Mount Everest geldt: $p = 0{,}31$ bar $\Rightarrow \log(p) = \log(0{,}31) = -0{,}508...$ [1p]



[1p]

Aflezen in de figuur bij $\log(p) \approx -0{,}51$ geeft als kookpunt $T \approx 69°$ C. [1p]

3p **15** In de drukpan is de temperatuur tijdens het koken $T = 130°$ C.

Deze waarde van T invullen in de formule geeft: $\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273 + 130} = 0{,}419...$ [1p]

dus $p = 10^{0{,}419...}$ [1p] $= 2{,}626...$

Afgerond op één decimaal is de druk in de hogedrukpan 2,6 bar. [1p]

3p **16** $\log(p) = 5{,}68 - \frac{2120}{273 + T} \Leftrightarrow \frac{2120}{273 + T} = 5{,}68 - \log(p)$ [1p] $\Rightarrow 273 + T = \frac{2120}{5{,}68 - \log(p)}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$T = \frac{2120}{5{,}68 - \log(p)} - 273$ [1p]

Derdemachtswortel

4p **17** Snijpunt A met de y-as berekenen: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt[3]{9 \cdot 0 - 27} = -3 \Rightarrow A(0, -3)$ [1p]

Snijpunt B met de x-as berekenen: $f(x) = \sqrt[3]{9x - 27} = 0 \Leftrightarrow$

$9x - 27 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$ [1p]

Lijn k gaat door de punten A en B dus voor de richtingscoëfficiënt geldt:

$rc_k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - (-3)}{3 - 0} = 1$ [1p]

6p **18** k, l en m zijn evenwijdig, dus $rc_k = rc_l = rc_m = 1$.

De afgeleide van f in de punten P en Q is dus ook 1.

$f(x)$ herschrijven en differentiëren met de kettingregel:

$f(x) = \sqrt[3]{9x - 27} = (9x - 27)^{\frac{1}{3}}$ [1p] $\Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (9x - 27)^{-\frac{2}{3}} \cdot 9 = 3 \cdot \frac{1}{(9x - 27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(9x - 27)^2}}$ [2p]

De afgeleide moet 1 zijn: $\frac{3}{\sqrt[3]{(9x - 27)^2}} = 1$ [1p] $\Rightarrow \sqrt[3]{(9x - 27)^2} = 3 \Leftrightarrow (9x - 27)^2 = 3^3 = 27 \Leftrightarrow$

$9x - 27 = \sqrt{27}$ of $9x - 27 = -\sqrt{27} \Leftrightarrow$

$9x = 27 + \sqrt{27}$ of $9x = 27 - \sqrt{27}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$x = \frac{27 + \sqrt{27}}{9} = 3{,}577...$ of $x = \frac{27 - \sqrt{27}}{9} = 2{,}422...$

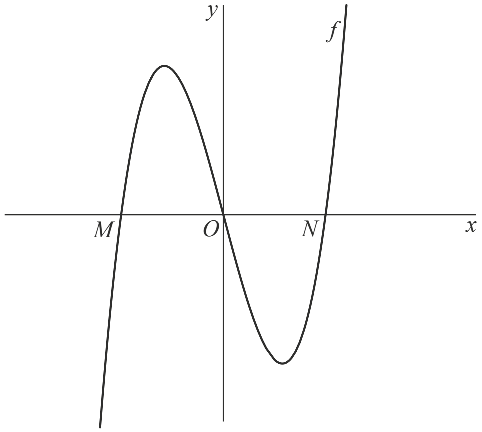
dus afgerond op twee decimalen: $x_P = 2{,}42$ en $x_Q = 3{,}58$ [1p]

Examen 2017-II

Afstand tussen twee raaklijnen

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x$. De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in M, de oorsprong O (0, 0) en N. Zie figuur 1.

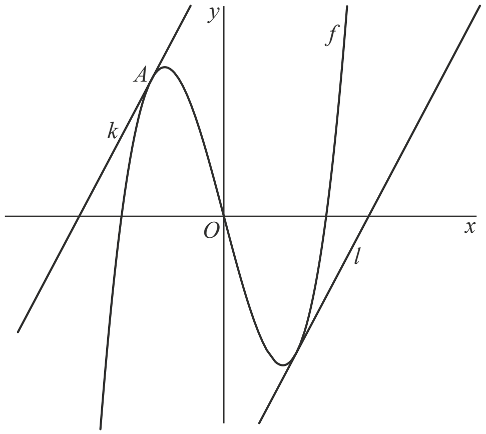
figuur 1



3p **1** Bereken exact de afstand tussen M en N.

De lijnen k en l zijn evenwijdige raaklijnen aan de grafiek van f.
Lijn k raakt de grafiek van f in het punt A (–2, 4). Zie figuur 2.

figuur 2



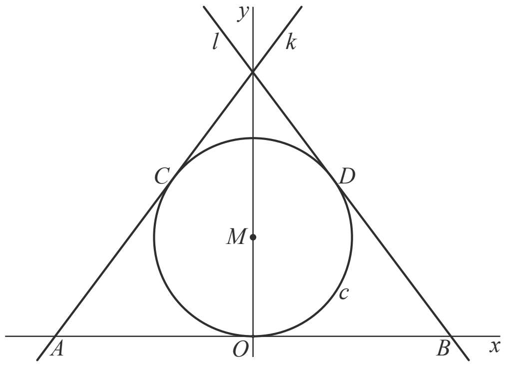
De afstand van O tot k is de helft van de afstand tussen k en l.

7p **2** Bereken algebraïsch de afstand tussen k en l. Geef je eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Over een cirkel gespannen

De cirkel *c* met middelpunt *M* (0, 5) is gegeven door $x^2 + (y - 5)^2 = 25$.
De punten *C*(–4, 8) en *D* (4, 8) liggen op de cirkel. De lijn *k* is de raaklijn aan *c* in punt *C* en de lijn *l* is de raaklijn aan *c* in punt *D*. Punt *A* is het snijpunt van *k* met de *x*-as en punt *B* is het snijpunt van *l* met de *x*-as. Zie figuur 1.

figuur 1

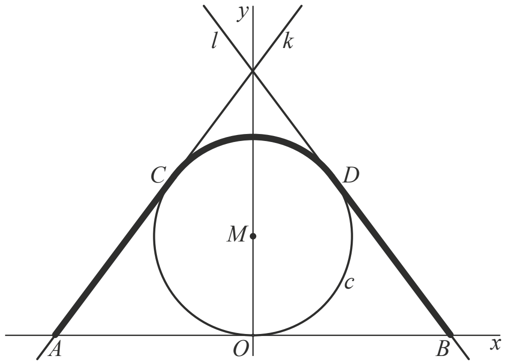


De coördinaten van punt *B* zijn (10, 0).

4p **3** Bewijs dit.

Tussen *A* en *B* wordt denkbeeldig een touwtje gespannen dat over de cirkel heen gaat. Het touwtje is zo gespannen dat het tussen *C* en *D* precies over de cirkel ligt. Het touwtje is recht tussen *A* en *C* en tussen *D* en *B*. Zie figuur 2.

figuur 2



5p **4** Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van het touwtje.

Zonnepanelen

De prijs van elektrische energie – gewoonlijk **elektriciteit** genoemd – stijgt niet elk jaar met hetzelfde percentage.
In de tabel staan de groeipercentages ten opzichte van het voorafgaande jaar voor de periode van 1997 tot en met 2006.

jaar	prijsstijging ten opzichte van het voorafgaande jaar in gehele procenten
1996	
1997	2
1998	1
1999	7
2000	14
2001	26
2002	3
2003	3
2004	5
2005	8
2006	6

Uit de gegevens in de tabel volgt dat de prijs van elektriciteit in 10 jaar tijd ongeveer is verdubbeld.

3p **5** Toon dit aan.

Een verdubbeling in 10 jaar kan ook bereikt worden door de prijs van elektriciteit jaarlijks met een vast percentage te laten stijgen.

4p **6** Bereken op algebraïsche wijze dit percentage. Rond je eindantwoord af op één decimaal.

Met zonnepanelen kan worden bespaard op de elektriciteitskosten.
Hoeveel er met zonnepanelen kan worden bespaard, hangt in deze opgave alleen af van de prijsstijging van elektriciteit en van de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen.

Zonder rekening te houden met de kosten van aankoop en installatie kan de totale besparing vanaf het moment van installatie worden berekend met behulp van de volgende formule:

$$B = \frac{19{,}9V}{P} \cdot \left(\left(1 + \frac{P}{100}\right)^t - 1 \right)$$

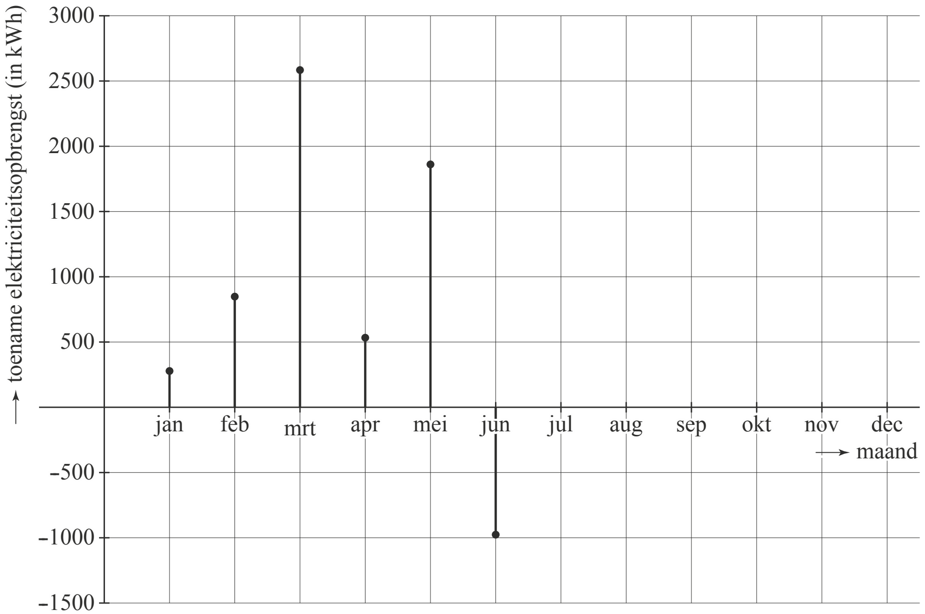
Hierin is *B* de totale besparing in euro's, *V* de elektriciteitsopbrengst van de zonnepanelen in kWh per jaar, *P* het percentage waarmee de elektriciteitsprijs jaarlijks stijgt en *t* het aantal jaren na 2006.

In januari 2006 worden zonnepanelen geplaatst.
De kosten voor de aankoop en installatie hiervan zijn € 13 000,-. De zonnepanelen leveren 2250 kWh per jaar.
We nemen aan dat de elektriciteitsprijs jaarlijks steeds met 7% stijgt.
Na een aantal jaren zal de totale besparing groter zijn dan de aanschafprijs van de zonnepanelen.

3p **7** Bereken na welk geheel aantal jaren dit voor het eerst het geval is.

Een school heeft een grote hoeveelheid zonnepanelen op het dak staan. In het jaar 2011 was de elektriciteitsopbrengst van deze zonnepanelen in totaal 45 000 kWh, waarvan 520 kWh in de maand december.

In het toenamediagram in de figuur zijn de gegevens van het eerste halfjaar van 2012 verwerkt.



Uiteindelijk bleek dat in het jaar 2012 5000 kWh minder elektriciteit werd geproduceerd dan in 2011.

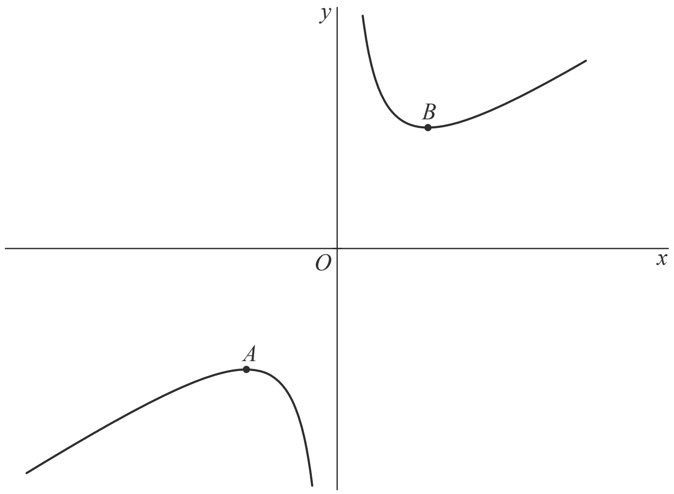
3p **8** Bereken hoeveel elektriciteit er in het tweede halfjaar van 2012 is geproduceerd. Geef je eindantwoord in honderden kWh nauwkeurig.

De toppen van de grafiek van een gebroken functie

De functie f is gegeven door:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x}$$

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f. Zie de figuur.



5p **9** Bereken exact de coördinaten van A en B.

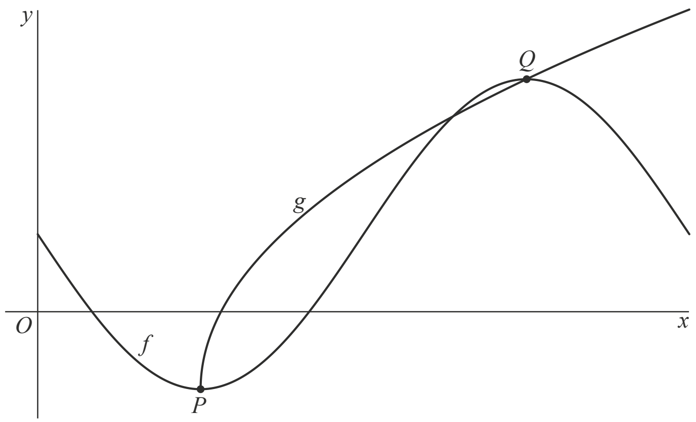
Sinus en wortel

Op het domein [0, 2] is de functie *f* gegeven door:

$f(x) = 1 - 2\sin(\pi x)$

4p **10** Bereken exact de nulpunten van *f*.

Verder is gegeven de functie *g* door $g(x) = -1 + \sqrt{16x - 8}$.
Zie de figuur.



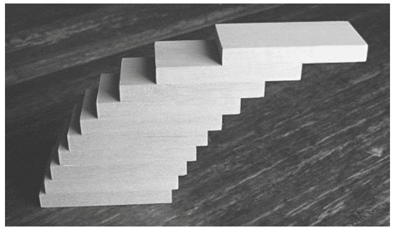
De punten *P* en *Q* zijn de toppen van de grafiek van *f*.

4p **11** Bewijs dat *P* en *Q* op de grafiek van *g* liggen.

5p **12** Bereken exact de helling van de grafiek van *g* in het snijpunt van de grafiek van *g* met de *x*-as.

Tegels stapelen

Door gelijke rechthoekige tegels ‘netjes’ op elkaar te stapelen kan een toren gebouwd worden die naar één kant overhelt. Zie de foto.

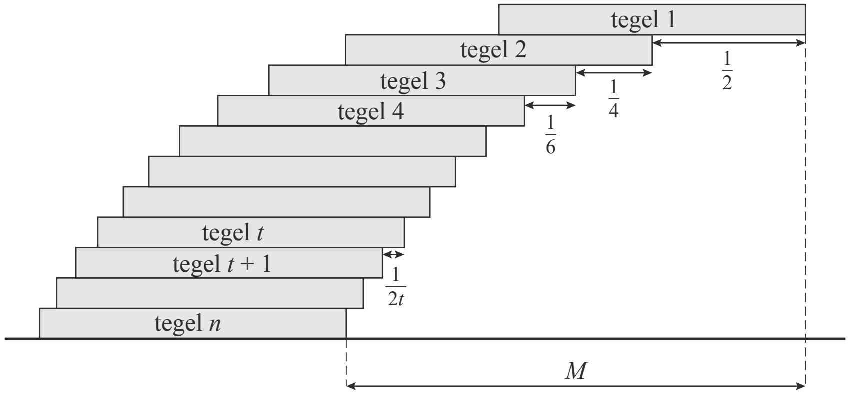


Het uitsteken van de gestapelde tegels vanaf de onderste tegel wordt de **overhang** genoemd. De overhang is maximaal als de stapel tegels nog net in evenwicht is, dus net niet omvalt.

De maximale overhang *M* bij een stapel van *n* tegels ontstaat als volgt:

- laat tegel 1 (de bovenste tegel) een halve tegellengte uitsteken ten opzichte van tegel 2 (de eronder liggende tegel);
- laat tegel 2 een kwart uitsteken ten opzichte van tegel 3;
- laat tegel 3 een zesde uitsteken ten opzichte van tegel 4;
- enzovoort.

Algemeen geldt dan: tegel *t* steekt $\frac{1}{2t}$-deel van een tegellengte uit ten opzichte van tegel *t* + 1. Zie de figuur.



Bij een bepaald aantal tegels is de maximale overhang meer dan één tegellengte.

3p **13** Bereken vanaf welk aantal tegels dit het geval is.

In de rest van deze opgave nemen we tegels van 30 cm lang en 15 cm breed met een dikte van 3 cm. Deze tegels stapelen we weer 'netjes' op elkaar, zoals op de foto en in de figuur.

Bij deze tegels kan de maximale overhang *M* benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 + \frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2} \qquad (1)$$

Hierin is *M* de maximale overhang in cm en is *n* het totaal aantal tegels in de stapel, met $n \geq 2$.

Wanneer er voldoende tegels beschikbaar zijn, kan in theorie de maximale overhang zo groot worden gemaakt als gewenst.
Met de genoemde 3 cm dikke tegels wordt een overhang van 1 meter gemaakt.

4p **14** Bereken hoeveel cm hoog de stapel tegels in dit geval minstens moet worden volgens formule (1).

Voor grote waarden van *n* kan *M* benaderd worden met de formule:

$$M = 34{,}54 \cdot \log(n-1) + 8{,}658 \qquad (2)$$

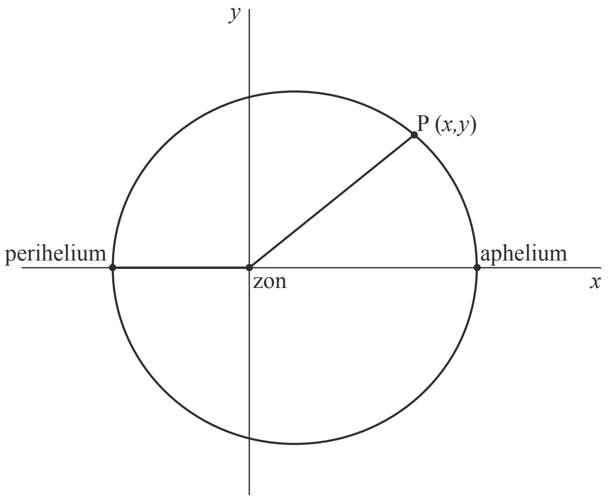
Hierin is *M* weer de maximale overhang in cm en is *n* weer het totaal aantal tegels in de stapel.

4p **15** Bereken voor welke waarde van *n* de benadering van *M* met formule (2) voor het eerst minder dan 0,1 centimeter afwijkt van de benadering met formule (1).

Pluto

De dwergplaneet Pluto beweegt om de zon. De afstand van Pluto tot de zon is niet altijd even groot.
De plaats waar Pluto zich het dichtst bij de zon bevindt wordt het **perihelium** genoemd, de plaats waar Pluto zich het verst van de zon af bevindt het **aphelium**. De baan van Pluto wordt in een assenstelsel weergegeven met de zon in de oorsprong en het perihelium en het aphelium op de x-as.
In figuur 1 is een mogelijke positie van Pluto (P) weergegeven.

figuur 1



Bij de bovenste helft van deze baan in het assenstelsel hoort (bij benadering) de volgende formule:

$$y = \sqrt{1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2} \qquad (1)$$

Hierbij zijn *x* en *y* in astronomische eenheden AE (1 AE = 150 miljoen km).

Uit formule (1) volgt dat de afstand van Pluto tot de zon in het perihelium 30 AE is en in het aphelium 50 AE.

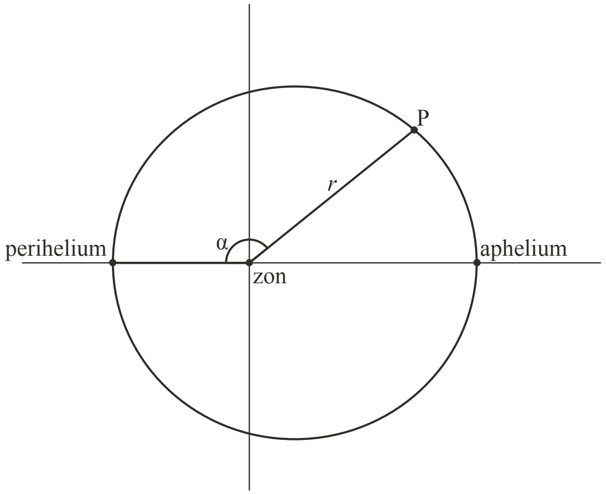
5p **16** Bewijs dit.

Een ander model voor de afstand van Pluto tot de zon luidt:

$$r = \frac{37{,}5}{1 + 0{,}25 \cdot \cos(\alpha)} \qquad (2)$$

Hierin is r de afstand van Pluto tot de zon in AE en is α de hoek tussen het lijnstuk zon-Pluto en het lijnstuk zon-perihelium. Zie figuur 2.

figuur 2

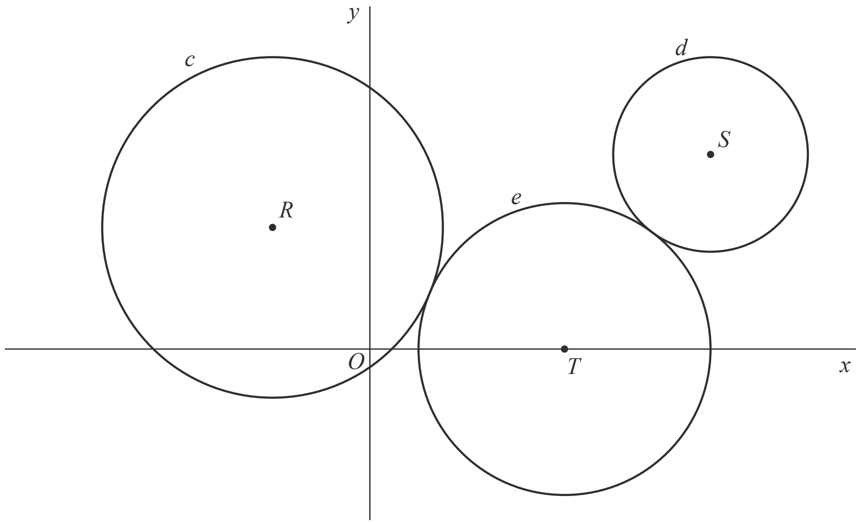


4p **17** Beredeneer op algebraïsche wijze met behulp van formule (2) dat de minimale afstand van Pluto tot de zon gelijk is aan 30 AE en de maximale afstand 50 AE.

Rakende cirkels

De cirkel c met middelpunt R is gegeven door $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$ en de cirkel d met middelpunt S is gegeven door $(x - 14)^2 + (y - 8)^2 = 16$.

Een derde cirkel e, met middelpunt T op de x-as, raakt aan beide cirkels. Verder liggen c en d buiten e. Zie de figuur.



De x-coördinaat van T noemen we p, dus $OT = p$.

Er geldt: de afstand van R tot T is gelijk aan $\sqrt{p^2 + 8p + 41}$.

3p **18** Bewijs dit.

De lijn door R en T gaat door het raakpunt van de cirkels c en e.
Bovendien gaat de lijn door S en T door het raakpunt van de cirkels d en e.
Verder is de afstand van S tot T gelijk aan $\sqrt{p^2 - 28p + 260}$.

5p **19** Bereken de straal van cirkel e.

Hints bij examen 2017-II

1 Bereken de nulpunten uit de vergelijking $f(x) = 0$.

2 Stel een vergelijking van k op met behulp van de afgeleide van f en de coördinaten van A. Bepaal een vergelijking voor een lijn door de oorsprong die loodrecht staat op k.
Bereken het snijpunt van k met deze nieuwe lijn en gebruik dit snijpunt om de vraag te beantwoorden.

3 Omdat $MD \perp l$ is het mogelijk om met behulp van de coördinaten van M en D een vergelijking van l op te stellen. Gebruik: $rc_{MD} \cdot rc_l = -1$.
Een aanpak met gelijkvormige driehoeken is ook mogelijk.

4 Bereken $\angle DMC$ om te bepalen welk deel het cirkelboogje CD is van de omtrek van de gehele cirkel. De lengten van AC en BD kunnen met Pythagoras berekend worden.

5 Tien groeifactoren vermenigvuldigen.

6 Oplossen $g^{10} = 2$.

7 Vul de gegeven P en V in de formule in en zoek de uitkomst $B = 13\,000$.

8 Tel de toename van januari 2012 op bij de elektriciteitsopbrengst van december 2011 enzovoort tot en met juni 2012. Zo kun je de elektriciteitsopbrengst van het eerste halfjaar van 2012 berekenen.

9 Vereenvoudig f en bepaal de toppen met behulp van de afgeleide functie.

10 Los op het gegeven interval exact op: $1 - 2\sin(\pi x) = 0$

11 Benaderingen met de rekenmachine leveren geen bewijs. De coördinaten van de toppen P en Q van f kunnen exact beredeneerd worden. Daarna de gevonden x-coördinaten invullen in g.

12 Nulpunt van g berekenen. Dan g herschrijven om te kunnen differentiëren.

13 Tel de getallen van de rij $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$... bij elkaar op tot de som groter is dan 1.

14 Los de vergelijking $M = 100$ cm op. Het aantal tegels n kan alleen een geheel getal zijn, dus een aanpak met een tabel ligt voor de hand. Bij gebruik van intersect moet er nog verstandig worden afgerond.

15 Los de ongelijkheid $\frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2} < 0{,}1$ op met behulp van een tabel.

16 De opdracht ‘Bewijs’ betekent dat je de genoemde afstanden algebraïsch moet berekenen. Alleen controleren door invullen is niet voldoende.

17 De breuk in formule (2) is maximaal als de noemer minimaal is. En minimaal als de noemer maximaal is.

18 Met behulp van de coördinaten van R en T kan de lengte van RT berekend worden.

19 Bereken met de gegeven formules de stralen van de cirkels c en d.
Stel twee formules op voor de straal van cirkel e. Stel deze formules aan elkaar gelijk en bereken de oplossing met behulp van de rekenmachine.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-II

Afstand tussen twee raaklijnen

3p **1** Nulpunten berekenen:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x^2 = 8$ [1p] $\Leftrightarrow$

$x = 0$ of $x = \sqrt{8}$ of $x = -\sqrt{8}$ dus $x_N = \sqrt{8}$ en $x_M = -\sqrt{8}$ [1p]

De exacte afstand tussen M en N is $x_N - x_M = \sqrt{8} - (-\sqrt{8}) = 2\sqrt{8}$. [1p]

7p **2** Lijn k heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4$ [1p]

k raakt de grafiek in $A(-2, 4)$ dus $a = rc_k = f'(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 = 6 - 4 = 2$. [1p]

$A(-2, 4)$ en $a = 2$ invullen in de vergelijking van k geeft: $4 = 2 \cdot -2 + b \Leftrightarrow b = 8 \Rightarrow$ een vergelijking van k is $y = 2x + 8$. [1p]

m is een lijn door de oorsprong die loodrecht staat op lijn k, dus m heeft een vergelijking van de vorm $y = px$.

$m \perp k \Leftrightarrow rc_m \cdot rc_k = -1 \Leftrightarrow p \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$. Een vergelijking van m is $y = -\frac{1}{2}x$. [1p]

m en k snijden elkaar als $-\frac{1}{2}x = 2x + 8$ [1p] $\Leftrightarrow -2\frac{1}{2}x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{-2\frac{1}{2}} = \frac{32}{-10} = -3{,}2$.

Bijbehorende y-waarde: $y = -\frac{1}{2} \cdot -3{,}2 = 1{,}6$ [1p] dus het snijpunt van m en k is $(-3{,}2;\ 1{,}6)$.

De afstand van de oorsprong tot $(-3{,}2;\ 1{,}6)$ is $\sqrt{3{,}2^2 + 1{,}6^2} = \sqrt{12{,}8}$ en de gevraagde afstand tussen k en l is tweemaal zo groot, dus $2\sqrt{12{,}8} = 7{,}1554...$.
Afgerond op twee decimalen is dat 7,16. [1p]

Over een cirkel gespannen

4p **3** l raakt de cirkel in punt D dus $MD \perp l$.
Uit $M(0, 5)$ en $D(4, 8)$ volgt de richtingscoëfficiënt van een lijn door M en D:

$rc_{MD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-5}{4-0} = \frac{3}{4}$. [1p]

Lijn l heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$.

Omdat MD loodrecht staat op l geldt: $rc_{MD} \cdot rc_l = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot rc_l = -1 \Leftrightarrow rc_l = -\frac{4}{3}$ [1p]

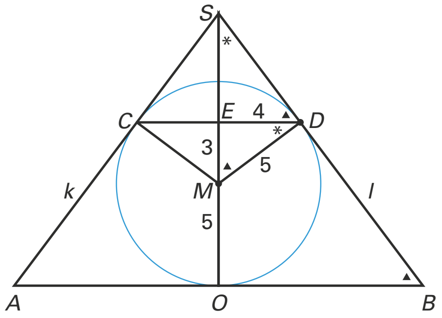
$a = -\frac{4}{3}$ en $D(4, 8)$ invullen in de vergelijking van l geeft:

$8 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b \Leftrightarrow 8 = -5\frac{1}{3} + b \Leftrightarrow b = 13\frac{1}{3}$ [1p]

De lijn l: $y = -\frac{4}{3}x + 13\frac{1}{3}$ snijdt de x-as als $-\frac{4}{3}x + 13\frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow$ (*vermenigvuldig met 3*)

$-4x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ dus het snijpunt van l met de x-as is $B(10, 0)$. [1p]

andere manier (met gelijkvormige driehoeken)
S is het snijpunt van k en l.
Kies E op OS zodanig dat $DE \perp OS$.
Uit $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ volgt dat de straal van de cirkel $\sqrt{25} = 5$ is, dus $OM = MD = 5$.
Uit de coördinaten van $D(4, 8)$ volgt:
$ED = 4$ en $EM = 8 - 5 = 3$.
De driehoeken MED en DES en BOS zijn gelijkvormig omdat overeenkomstige hoeken even groot zijn. [1p]



© ThiemeMeulenhoff

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken volgen de volgende verhoudingstabellen.

ΔMED	ME	ED	MD
ΔDES	DE	ES	DS

$\Rightarrow$

3	4	5
4	ES	DS

dus $ES = \frac{4}{3} \cdot 4 = 5\frac{1}{3}$ [1p] $\Rightarrow OS = 8 + 5\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$. [1p]

ΔMED	ME	ED	MD
ΔBOS	BO	OS	BS

$\Rightarrow$

3	4	5
BO	$13\frac{1}{3}$	BS

dus $BO = \frac{13\frac{1}{3}}{4} \cdot 3 = \frac{40}{12} \cdot 3 = 10$ en hieruit volgt dat de coördinaten van $B\,(10, 0)$ zijn. [1p]

5p **4** *Rekenmachine instellen op graden.*

De lengte van BD is $\sqrt{(10-4)^2 + (8-0)^2} = 10$. AC is even lang. [1p]
ΔMED is een driehoek met zijden 3, 4 en 5 (zie vorige vraag).
$\tan(\angle DME) = \frac{4}{3}$ [1p] $\Rightarrow \angle DME = 53{,}13...^\circ \Rightarrow \angle DMC = 2 \cdot 53{,}13...^\circ = 106{,}26...^\circ$ [1p]
Lengte boog $CD = \frac{106{,}26...}{360} \cdot$ (omtrek cirkel) $= \frac{106{,}26...}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = 9{,}272...$ [1p]
De lengte van het touwtje is AC + lengte boog $CD + BD = 10 + 9{,}272... + 10 = 29{,}272...$
Afgerond op één decimaal: 29,3 [1p]

Zonnepanelen

3p **5** Groeifactoren vermenigvuldigen:
$1{,}02 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}26 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}06$ [1p] $= 2{,}019...$ is de groeifactor per 10 jaar [1p] dus de prijs is in die 10 jaar iets meer dan verdubbeld. [1p]

4p **6** Noem de groeifactor per jaar g.
Dan moet gelden: $g^{10} = 2$ [1p] $\Leftrightarrow g = 2^{\frac{1}{10}}$ [1p] $= 1{,}0717...$ [1p] (of $g = \sqrt[10]{2}$)
Afgerond op één decimaal is het percentage per jaar 7,2%. [1p]

3p **7** $P = 7$ procent per jaar en $V = 2250$ kWh per jaar $\Rightarrow$
$B = \frac{19{,}9 \cdot 2250}{7} \cdot \left(\left(1 + \frac{7}{100}\right)^t - 1\right) = 6396{,}4... \cdot (1{,}07^t - 1)$
De besparing is gelijk aan de kosten voor de aankoop en installatie als $B = 13\,000$.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 6396{,}4... \cdot (1{,}07^x - 1)$ en zoek in een tabel de uitkomst 13 000. [1p]

x	y_1		
16	12 487		
17	13 809	←	
18	15 223		[1p]

Na 17 jaar is de totale besparing voor het eerst groter dan de aanschafprijs van de zonnepanelen. [1p]

3p **8** De electriciteitsopbrengst in december 2011 was 520 kWh.
In het toenamediagram kunnen de toenamen voor het eerste halfjaar van 2012 worden afgelezen. Hiermee kan de elektriciteitsopbrengst per maand worden berekend:

	vorige maand		toename [1p]		[1p]
januari 2012:	520	+	275	=	795 kWh
februari 2012:	795	+	850	=	1645 kWh
maart 2012:	1645	+	2575	=	4220 kWh
april 2012:	4220	+	525	=	4745 kWh
mei 2012:	4745	+	1850	=	6595 kWh
juni 2012:	6595	+	– 975	=	5620 kWh
totaal eerste halfjaar					23 620 kWh

De electriciteitsopbrengst in 2012 was 45 000 – 5000 = 40 000 kWh, dus de elektriciteitsopbrengst in het tweede halfjaar was 40 000 – 23 620 = 16 380.
Afgerond 16 400 kWh. [1p]
De afgelezen toenamen mogen maximaal 50 kWh afwijken van de waarden hierboven.

De toppen van de grafiek van een gebroken functie

5p **9** Eerst f herleiden om te kunnen differentiëren.
$f(x) = \frac{2x^2 + 18}{3x} = \frac{2x^2}{3x} + \frac{18}{3x} = \frac{2}{3}x + \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3}x + 6x^{-1}$ [1p] $\Rightarrow$
$f'(x) = \frac{2}{3} - 6x^{-2}$ [1p] $= \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2}$
In de toppen A en B geldt:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{6}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 18$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ of $x = -3$ [1p]
$x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{2 \cdot 3^2 + 18}{3 \cdot 3} = \frac{36}{9} = 4$ dus de coördinaten van B zijn (3, 4).
$x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{2 \cdot (-3)^2 + 18}{3 \cdot (-3)} = \frac{36}{-9} = -4$ dus de coördinaten van A zijn (–3, –4). [1p]

Sinus en wortel

4p **10** $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ [1p] $\Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin(\frac{1}{6}\pi) \Leftrightarrow$
$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ [2p] $\Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2$ of $x = 1 - \frac{1}{6} + k \cdot 2 \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2$ of $x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$
De nulpunten op het domein [0, 2] zijn $x = \frac{1}{6}$ en $x = \frac{5}{6}$. [1p]

4p **11** De evenwichtsstand van f is $y = 1$ en de amplitude is 2.
De periode van f is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ en voor $x = 0$ gaat de grafiek van f dalend door de evenwichtsstand, dus de coördinaten van P zijn (0,5; –1) en die van Q zijn (1,5; 3). [2p]
$g(0{,}5) = -1 + \sqrt{16 \cdot 0{,}5 - 8} = -1 + \sqrt{0} = -1$ dus P(0,5; –1) ligt op de grafiek van g. [1p]
$g(1{,}5) = -1 + \sqrt{16 \cdot 1{,}5 - 8} = -1 + \sqrt{16} = -1 + 4 = 3$ dus Q(1,5; 3) ligt op de grafiek van g. [1p]

5p **12** De grafiek van g snijdt de x-as als $g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$-1 + \sqrt{16x-8} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{16x-8} = 1 \Rightarrow 16x - 8 = 1$ [1p] $\Leftrightarrow 16x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{16}$ [1p]
Eerst g herschrijven en dan differentiëren met de kettingregel:

$g(x) = -1 + \sqrt{16x-8} = -1 + (16x-8)^{\frac{1}{2}}$ [1p] $\Rightarrow$

$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot (16x-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16 = 8 \cdot \frac{1}{(16x-8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{\sqrt{16x-8}}$ [1p]

De helling van de grafiek van g voor $x = \frac{9}{16}$ is $g'(\frac{9}{16}) = \frac{8}{\sqrt{16 \cdot \frac{9}{16} - 8}} = \frac{8}{\sqrt{9-8}} = 8$ [1p]

Tegels stapelen

3p **13** Maximale overhang bij vier tegels: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12} (\approx 0{,}92)$ tegellengte. [1p]

Maximale overhang bij vijf tegels: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{12}{24} + \frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24} =$
$\frac{25}{24} (\approx 1{,}04)$ tegellengte. [1p]
Vanaf vijf tegels is de maximale overhang meer dan één tegellengte. [1p]

4p **14** De maximale overhang is 1 meter dus $M = 100$ cm.

Voer in de rekenmachine in $y_1 = 34{,}54 \cdot \log(x-1) + 8{,}658 + \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$.

Het aantal tegels kan alleen een geheel getal zijn.
Zoek met behulp van de rekenmachine in een tabel de uitkomst 100: [1p]

x	y_1	
441	99,98	
442	100,01	←
443	100,05	[1p]

Er zijn ten minste 442 [1p] tegels nodig voor een maximale overhang van 1 meter.
Elke tegel heeft een dikte van 3 cm dus bij gebruik van 442 tegels wordt de stapel
$3 \cdot 442 = 1326$ cm hoog. [1p]

4p **15** Het verschil tussen formule (1) en (2) is $\frac{15}{2(n-1)} + \frac{5}{4(n-1)^2}$. [1p]

Voer in de rekenmachine in $y_1 = \frac{15}{2(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2}$.

Zoek met behulp van de rekenmachine in een tabel de eerste uitkomst die kleiner is dan 0,1:

x	y_1	
76	0,1002	
77	0,0989	←
78	0,0976	[1p]

Voor $n = 77$ wijken beide formules voor het eerst minder dan 0,1 van elkaar af. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Pluto

5p **16** Perihelium en aphelium liggen in de figuur op de x-as dus $y = 0$:
$\sqrt{1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2} = 0$ [1p] $\Rightarrow 1500 - \frac{15}{16}(x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{15}{16}(x-10)^2 = 1500$ [1p] $\Leftrightarrow$
$(x-10)^2 = \frac{16}{15} \cdot 1500 = 1600$ [1p] $\Leftrightarrow x - 10 = 40$ of $x - 10 = -40$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x = 50$ of $x = -30$ dus in het perihelium is de afstand van Pluto tot de zon 30 AE, en in het aphelium 50 AE. [1p]

4p **17** Uit $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ volgt $-0{,}25 \leq 0{,}25 \cdot \cos(\alpha) \leq 0{,}25 \Leftrightarrow 0{,}75 \leq 1 + 0{,}25 \cdot \cos(\alpha) \leq 1{,}25$
dus de noemer van de breuk is altijd positief.
De breuk $r = \frac{37{,}5}{1 + 0{,}25 \cdot \cos(\alpha)}$ is maximaal als de noemer minimaal is [1p], dus r is

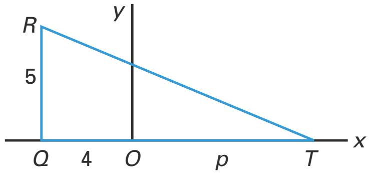
maximaal als de noemer 0,75 is: $r_{max} = \frac{37{,}5}{0{,}75} = 50$. [1p]

De breuk $r = \frac{37{,}5}{1 + 0{,}25 \cdot \cos(\alpha)}$ is minimaal als de noemer maximaal is [1p], dus r is

minimaal als de noemer 1,25 is: $r_{min} = \frac{37{,}5}{1{,}25} = 30$. [1p]

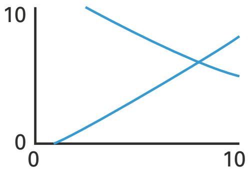
Rakende cirkels

3p **18** Uit $c: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 49$ volgt dat het middelpunt van deze cirkel $R(-4, 5)$ is. [1p]
De afstand van $R(-4, 5)$ tot $T(p, 0)$ is
$\sqrt{(p-(-4))^2 + (0-5)^2}$ [1p] $= \sqrt{(p+4)^2 + 5^2} = \sqrt{p^2 + 8p + 16 + 25} = \sqrt{p^2 + 8p + 41}$ [1p]
andere manier
Uit $c: (x+4)^2 + (y-5)^2 = 49$ volgt dat het middelpunt van deze cirkel $R(-4, 5)$ is. [1p]



Q is de projectie van R op de x-as dus $QO = 4 \Rightarrow QT = 4 + p$ en $QR = 5$. [1p]
Pythagoras in ΔQTR:
$RT = \sqrt{QT^2 + QR^2} = \sqrt{(4+p)^2 + 5^2} = = \sqrt{16 + 8p + p^2 + 25} = \sqrt{p^2 + 8p + 41}$ [1p]

5p **19** De straal van cirkel c is $\sqrt{49} = 7$ dus de straal van cirkel e is $\sqrt{p^2 + 8p + 41} - 7$. [1p]
De straal van cirkel d is $\sqrt{16} = 4$ dus de straal van cirkel e is $\sqrt{p^2 - 28p + 260} - 4$. [1p]
Beide formules moeten dezelfde uitkomst geven. [1p]
Voer in de rekenmachine in $y_1 = \sqrt{x^2 + 8x + 41} - 7$ en $y_2 = \sqrt{x^2 - 28x + 260} - 4$



Intersect (snijpunt) geeft $x = 8$ dus T is het punt (8, 0). [1p]
De straal van cirkel e is $\sqrt{8^2 + 8 \cdot 8 + 41} - 7 = \sqrt{169} - 7 = 13 - 7 = 6$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Examen 2018-I

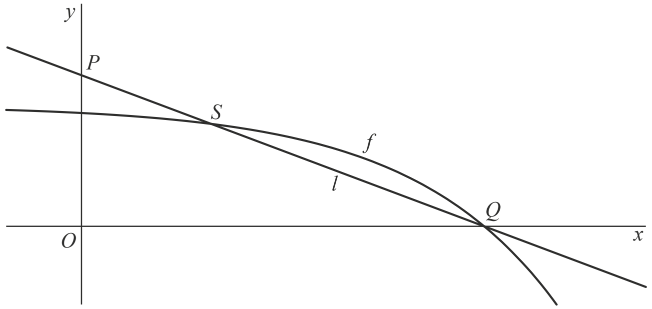
Macht van 2

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - 2^{0,3x-2}$.

Op de grafiek van f ligt een punt R. De y-coördinaat van R is 2.

3p **1** Bereken exact de x-coördinaat van R.

De grafiek van f snijdt de x-as in het punt Q.
Verder zijn gegeven het punt $P(0, 5)$ en de lijn l door P en Q.
Lijn l en de grafiek van f snijden elkaar behalve in Q ook in het punt S. Zie de figuur.



6p **2** Bereken de coördinaten van S. Rond deze coördinaten af op twee decimalen.

De grafiek van f wordt 20 naar links en 10 omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie g.
De functie g kan geschreven worden in de vorm $g(x) = a + b \cdot 2^{0,3x}$.

3p **3** Bereken de waarden van a en b.

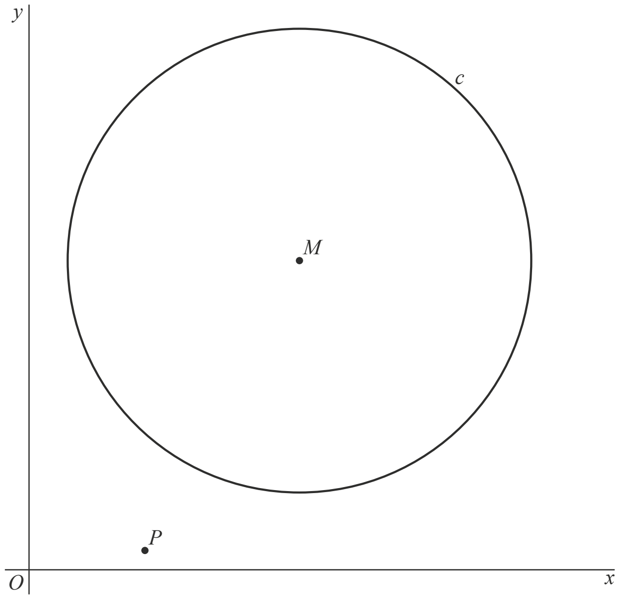
Afstand 5

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$. Verder is gegeven het punt $P(6, 1)$.

De afstand tussen l en P is 5.

6p **4** Bewijs dit.

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door $x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308$.
In de figuur zijn punt P en cirkel c met middelpunt M weergegeven.



De afstand tussen c en P is ook 5.
De afstand tussen M en P is groter dan de afstand tussen M en de x-as.

4p **5** Bereken exact het verschil tussen deze twee afstanden.

Hardlopen

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand.

De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0{,}06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.

Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

3p **6** Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

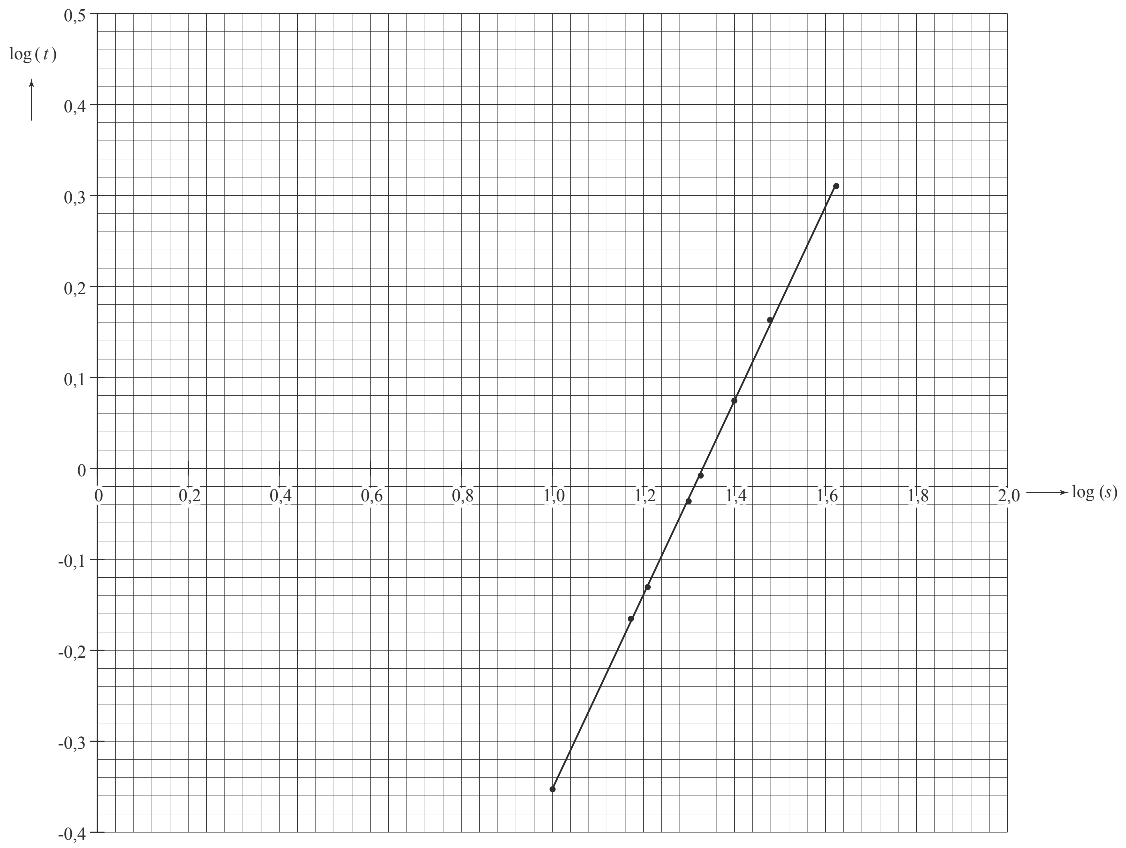
In de onderstaande tabel staan de wereldrecords hardlopen op de weg bij de heren op een aantal afstanden zoals ze in het jaar 2015 waren.

		wereldrecordtijd in 2015		
wedstrijd	**afstand (in meters)**	**uren**	**minuten**	**seconden**
10 km	10 000		26	44
15 km	15 000		41	13
10 mijl	16 093		44	23
20 km	20 000		55	21
halve marathon	21 097		58	23
25 km	25 000	1	11	18
30 km	30 000	1	27	37
marathon	42 195	2	02	57

In de hardloopsport wordt vaak gekeken naar de tijd die een hardloper gemiddeld over een kilometer doet. Dit wordt het **looptempo** genoemd.

3p **7** Bereken het looptempo van het wereldrecord op de marathon in het jaar 2015. Geef je eindantwoord in hele minuten en seconden nauwkeurig.

In onderstaande figuur is de logaritme van de tijd t in uren tegen de logaritme van de afstand s in kilometers van de wereldrecords op de afstanden uit de tabel uitgezet. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn, die ook in de uitwerkbijlage is getekend.



5p **8** Bepaal met behulp van de lijn in de figuur op de uitwerkbijlage het te verwachten wereldrecord hardlopen op een afstand van 50 kilometer. Geef je eindantwoord in hele uren en minuten nauwkeurig.

De helling

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}x$.

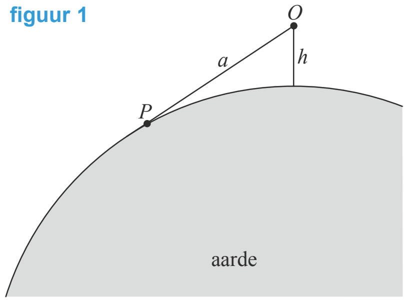
6p **9** Bereken exact voor welke waarden van x de helling van de grafiek van f groter is dan $3\frac{1}{2}$

Horizonafstand

Als men vanaf bijvoorbeeld een hoog gebouw of een berg vrij zicht heeft tot aan de horizon, is de horizon verder weg dan wanneer er vanaf de grond naar de horizon gekeken wordt.

Het kijken naar de horizon gebeurt vanuit het oog O in een rechte lijn naar een punt P op de horizon.
De hoogte waarop het oog zich bevindt noemen we de **kijkhoogte**.
De afstand OP tot aan de horizon noemen we de **horizonafstand**.
De horizonafstand a in meters hangt af van de kijkhoogte h in meters boven de grond.
Zie figuur 1.

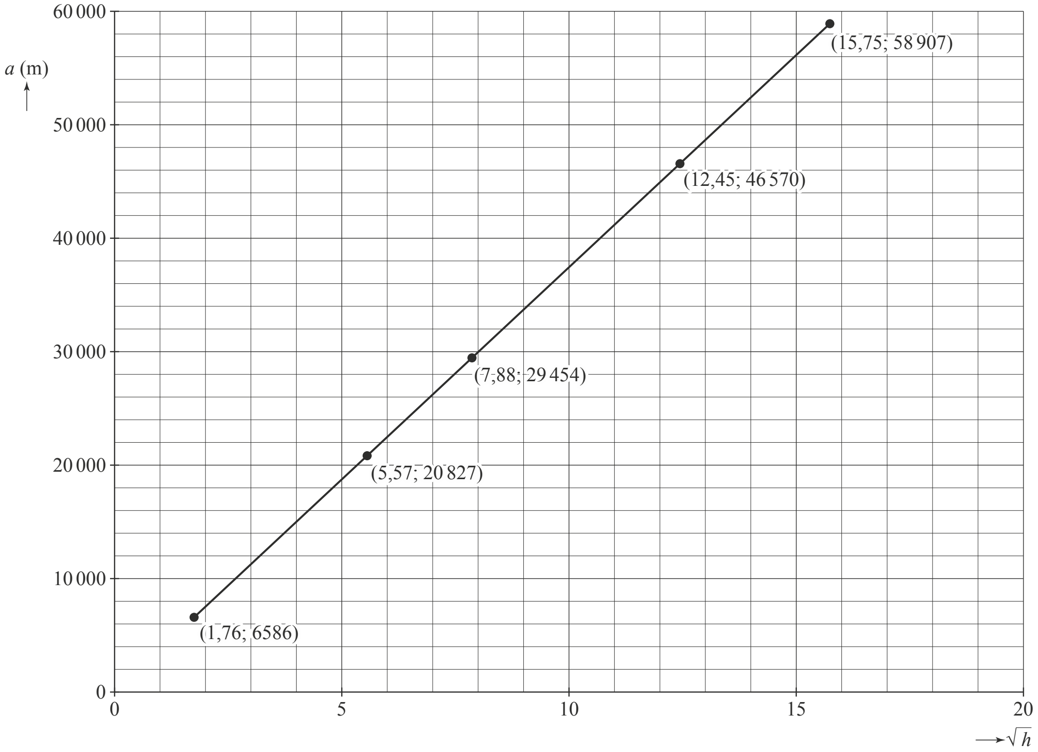
figuur 1



Hoe groter de kijkhoogte, hoe groter de horizonafstand.
De horizonafstand a is bij benadering evenredig met $\sqrt{h}$.

In figuur 2 is dit evenredige verband tussen a en $\sqrt{h}$ door middel van een rechte lijn weergegeven. Bovendien zijn van een aantal punten op deze lijn de coördinaten gegeven.

figuur 2



3p **10** Bepaal met behulp van figuur 2 welke kijkhoogte hoort bij een horizonafstand van 40 km. Geef je eindantwoord in hele meters nauwkeurig.

Bij benadering geldt:

$a = 3741\sqrt{h}$

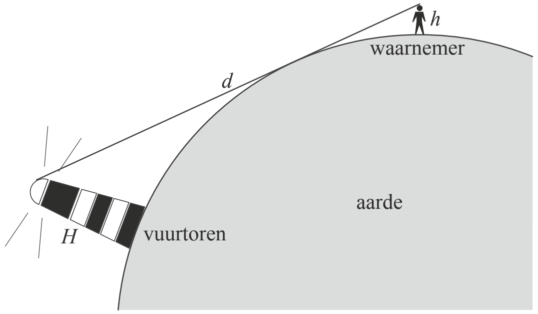
Hierin is a weer de horizonafstand in m en h weer de kijkhoogte in m.
De horizonafstand kan ook in kilometers uitgedrukt worden. Het verband tussen de horizonafstand k in kilometers en h kan worden beschreven met een formule van de vorm $k = \sqrt{c \cdot h}$.

3p **11** Bereken algebraïsch de waarde van c. Geef je eindantwoord in helen nauwkeurig.

Het licht van de Lange Jaap, een vuurtoren bij Den Helder, reikt 30 zeemijl ver. Een zeemijl is 1852 m.
De lamp van de Lange Jaap bevindt zich op een hoogte van 57 m. Vanaf een kijkhoogte van 2 m is het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl niet (rechtstreeks) te zien, omdat de vuurtoren zich dan achter de horizon bevindt.

De maximale afstand d waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken is afhankelijk van de hoogte H waarop de lamp van een vuurtoren zich bevindt, en van de kijkhoogte h van de waarnemer. Zie figuur 3.

figuur 3



Bij benadering geldt:

$d = 3{,}74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{h})$

Hierin is d de maximale afstand in km waarop het licht van een vuurtoren een waarnemer (rechtstreeks) kan bereiken, H de hoogte van het licht van de vuurtoren in m en h nog steeds de kijkhoogte in m.

Wanneer het licht van de Lange Jaap op een afstand van 30 zeemijl vanaf een kijkhoogte van 2 m wel (rechtstreeks) zichtbaar zou zijn, zou de lamp zich een stuk hoger moeten bevinden.

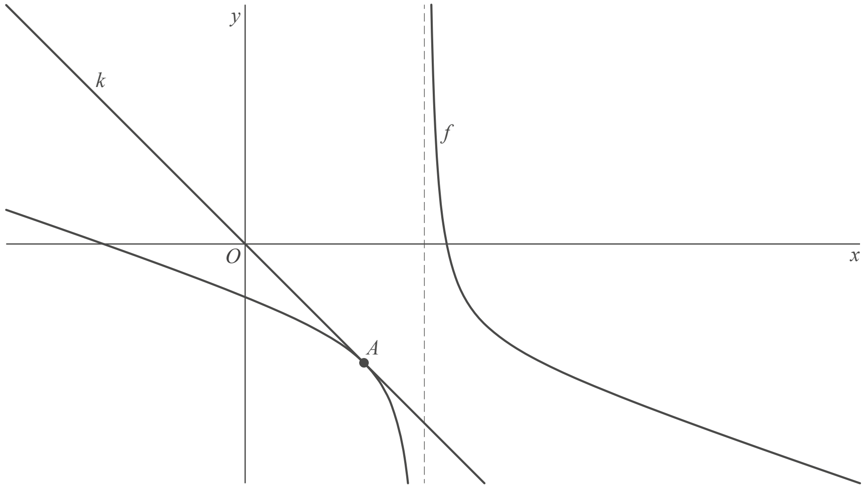
5p **12** Bereken hoeveel keer zo hoog de lamp zich dan minstens zou moeten bevinden. Geef je eindantwoord in één decimaal nauwkeurig.

Raaklijnen door de oorsprong

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A(1, -3)$. Zie figuur 1.

figuur 1

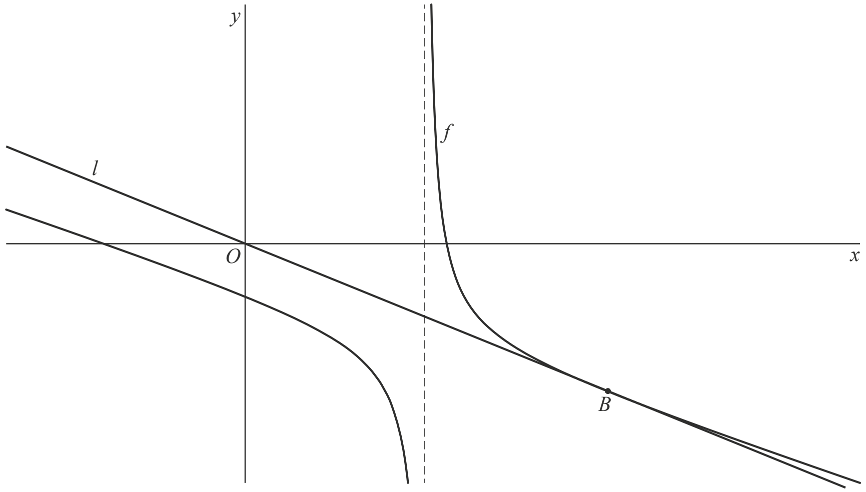


Lijn k gaat door de oorsprong.

5p **13** Bewijs dit met behulp van differentiëren.

De lijn l met vergelijking $y = -\frac{11}{9}x$ raakt de rechtertak van de grafiek van f in het punt B. Zie figuur 2.

figuur 2



Lijn l snijdt de linkertak van de grafiek van f niet.

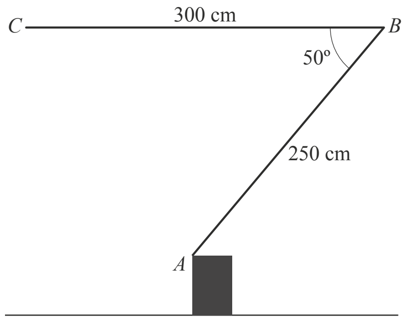
6p **14** Bewijs dit.

Hoogwerker

Met behulp van een hoogwerker kan een monteur bepaalde werkzaamheden op hoogte uitvoeren.
Zie de foto.
Hierbij staat de monteur in een bak, die is bevestigd aan twee scharnierende draagarmen.
De twee draagarmen draaien ten opzichte van elkaar en ten opzichte van het wagentje waaraan de onderste draagarm bevestigd is.

In deze opgave bekijken we een vereenvoudigd 2-dimensionaal model van de situatie.
Zie figuur 1, waarin dit is weergegeven.

figuur 1

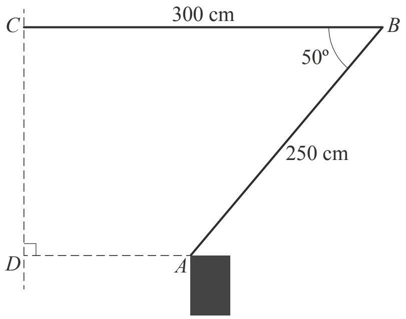


Punt A is het scharnierpunt op het wagentje, punt B het scharnierpunt van de twee draagarmen en punt C het einde van de bovenste draagarm waaraan de bak bevestigd is.
- De lengte van draagarm AB is 250 cm.
- De lengte van draagarm BC is 300 cm.

In de situatie zoals weergegeven in figuur 1 geldt dat BC horizontaal is. Hoek ABC is dan 50 graden.

In figuur 2 is ook het punt D weergegeven. D is de loodrechte projectie van A op de verticale lijn door C. Deze verticale lijn is in figuur 2 gestippeld weergegeven.

figuur 2

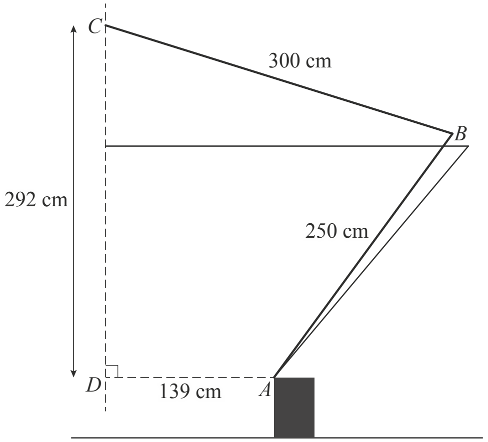


De afstand AD is ongeveer 139 cm.

3p **15** Toon dit aan. Je kunt hierbij gebruikmaken van figuur 2.

Wanneer de monteur de bak recht omhoog verplaatst, zal hoek *ABC* toenemen. Zie figuur 3.

figuur 3



De monteur verplaatst de bak recht omhoog tot $CD = 292$ cm.

4p **16** Bereken in dit geval de toename van hoek *ABC* in hele graden nauwkeurig.

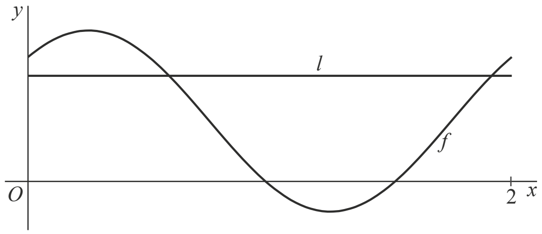
(Co)sinus

Op het domein [0, 2] is de functie *f* gegeven door:

$f(x) = 2 + 3\sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right)$

Verder is de lijn *l* gegeven door de vergelijking $y = \frac{7}{2}$. Zie figuur 1.

figuur 1



Op het gegeven domein snijden *l* en de grafiek van *f* elkaar in twee punten.

4p **17** Bereken exact de *x*-coördinaten van deze punten.

Een functie *g* heeft een functievoorschrift van de vorm:

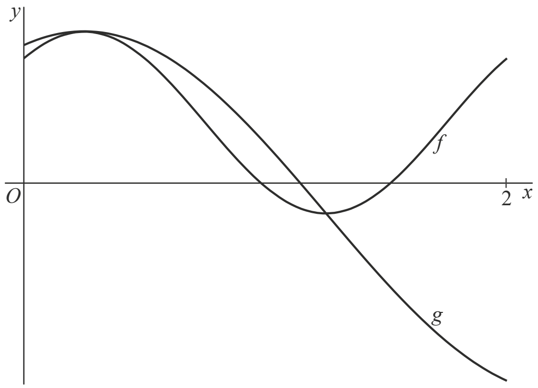
$g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$

Er geldt:

- De periode van *g* is 4.
- Het hoogste punt van de grafiek van *g* valt samen met het hoogste punt van de grafiek van *f*.
- De amplitude van de grafiek van *g* is twee keer zo groot als de amplitude van de grafiek van *f*.

Zie figuur 2.

figuur 2



5p **18** Bereken mogelijke exacte waarden van *p*, *q*, *r* en *s*.

Hints bij examen 2018-I

1 Toewerken naar een vergelijking met grondtal 2 van het type $2^a = 2^b$.

2 Bereken de coördinaten van *Q*. Stel een vergelijking op van de lijn *l* door *P* en *Q*. Bereken het snijpunt van *l* en *f* (mag met de rekenmachine).

3 Stel eerst een formule op voor de verschoven grafiek en werk deze om naar de gewenste vorm. Gebruik de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$.

4 Stel de vergelijking op van de lijn m die door *P* gaat en die loodrecht staat op *l*. De afstand tussen *P* en het snijpunt van *l* en *m* zou 5 moeten zijn.

5 Bereken met behulp van kwadraatafsplitsen het middelpunt en de straal van *c*.

6 Als de afstand verdubbelt, geldt $s_2 = 2 \cdot s_1$.

7 Reken het wereldrecord op de marathon om naar seconden. Deel vervolgens door de afgelegde afstand in kilometers.

8 Bereken log(*s*) en lees in de figuur de bijbehorende waarde van log(*t*) af. *t* moet worden uitgedrukt in uren en minuten.

9 Differentieer *f* en los exact op $f'(x) = 3\frac{1}{2}$. Lees het antwoord op de vraag af met behulp van een grafiek van *f'*.

10 Lees bij de juiste waarde van *a* af welke waarde van $\sqrt{h}$ hierbij hoort.

11 Uit de gegevens volgt $a = 1000k$. Vul dit in de formule in. Gebruik de regel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

12 Vul de juiste waarden voor *d* en *h* in de formule in en los de vergelijking die zo ontstaat op (mag met de rekenmachine).

13 *f* herschrijven en differentiëren met de kettingregel. Vervolgens een vergelijking van de lijn *k* opstellen.

14 Snijpunt van *l* en *f* zoeken. Je zult naast punt *B* geen ander snijpunt vinden.

15 Teken een geschikte hulplijn. Er zijn diverse mogelijkheden, bijvoorbeeld van *A* naar een punt *E* op *BC*, zodanig dat *AE* loodrecht op *BC* staat.

16 Bereken de lengte van *AC*. Daarna de cosinusregel in ΔABC.

17 Gebruik de formule: $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - a + k \cdot 2\pi$.

18 Met de periode van *g* kan *r* berekend worden. Beredeneer de positie van het hoogste punt van *f* en gebruik deze om *p* en *s* te berekenen.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2018-I

Macht van 2

3p **1** Exact oplossen $f(x) = 2$:
$4 - 2^{0,3x-2} = 2 \Leftrightarrow 2^{0,3x-2} = 2$ [1p] $\Leftrightarrow 2^{0,3x-2} = 2^1 \Leftrightarrow 0,3x - 2 = 1$ [1p] $\Leftrightarrow 0,3x = 3 \Leftrightarrow x = 10$
dus de *x*-coördinaat van *R* is 10. [1p]

6p **2** De grafiek van *f* snijdt de *x*–as als $f(x) = 0$:
$4 - 2^{0,3x-2} = 0 \Leftrightarrow 2^{0,3x-2} = 4 \Leftrightarrow 2^{0,3x-2} = 2^2 \Leftrightarrow 0,3x - 2 = 2$ [1p] $\Leftrightarrow 0,3x = 4 \Leftrightarrow x = 13\frac{1}{3}$ dus de coördinaten van *Q* zijn $(13\frac{1}{3}, 0)$. [1p]

De lijn door *P*(0, 5) en $(13\frac{1}{3}, 0)$ heeft helling (rico) $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{13\frac{1}{3}} = -\frac{3}{8}$ [1p] dus een vergelijking van *l* is $y = -\frac{3}{8}x + 5$. [1p]

Voer in de rekenmachine in $y_1 = 4 - 2^{0,3x-2}$ en $y_2 = -\frac{3}{8}x + 5$. [1p]

De optie *intersect* geeft $x = 4,295...$ en $y = 3,389...$ dus afgerond op twee decimalen: *S*(4,30; 3,39). [1p]

3p **3** $4 - 2^{0,3x+2} \xrightarrow{\text{20 naar links}} 4 - 2^{0,3(x+20)-2} \xrightarrow{\text{10 omhoog}} 4 - 2^{0,3(x-20)-2} + 10$ [1p] $\Rightarrow$
$g(x) = 4 - 2^{0,3(x+20)-2} + 10 = 14 - 2^{0,3x+6-2} = 14 - 2^{0,3x+4} = 14 - 2^{0,3x} \cdot 2^4$ [1p] $=$
$14 - 16 \cdot 2^{0,3x}$ dus $a = 14$ en $b = -16$. [1p]

Afstand 5

6p **4** Stel *m* is een lijn die loodrecht op *l* staat en die door punt *P* gaat.

Dan geldt $rc_l \cdot rc_m = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot rc_m = -1 \Leftrightarrow rc_m = -\frac{4}{3}$. [1p]

$m: y = -\frac{4}{3}x + b$ gaat door *P*(6, 1) dus $1 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + b \Leftrightarrow 1 = -8 + b \Leftrightarrow b = 9$. [1p]

Nu het snijpunt van $l: y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ en $m: y = -\frac{4}{3}x + 9$ berekenen:

$\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} = -\frac{4}{3}x + 9 \Leftrightarrow$ (vermenigvuldigen met 12)

$9x + 33 = -16x + 108 \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$ [2p]

Invullen van $x = 3$ geeft $y = -\frac{4}{3} \cdot 3 + 9 = 5$ [1p] dus de coördinaten van het snijpunt van *l* en *m* zijn (3, 5).
De afstand tussen punt *P* en de lijn *l* is gelijk aan de afstand tussen *P*(6, 1) en (3, 5).
Die afstand is $\sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$. [1p]

4p **5** Kwadraatafsplitsen:
$x^2 + y^2 - 28x - 32y = -308 \Leftrightarrow x^2 - 28x + 14^2 + y^2 - 32y + 16^2 = -308 + 14^2 + 16^2 \Leftrightarrow$
$(x - 14)^2 + (y - 16)^2 = 144$
De straal van *c* is $\sqrt{144} = 12$.
De afstand tussen *c* en *P* is 5 dus de afstand tussen *M* en *P* is 12 + 5 = 17. [1p]
De coördinaten van *M* zijn (14, 16) [1p] dus de afstand van *M* tot de *x*-as is 16. [1p]
Het verschil tussen deze twee afstanden is 1. [1p]

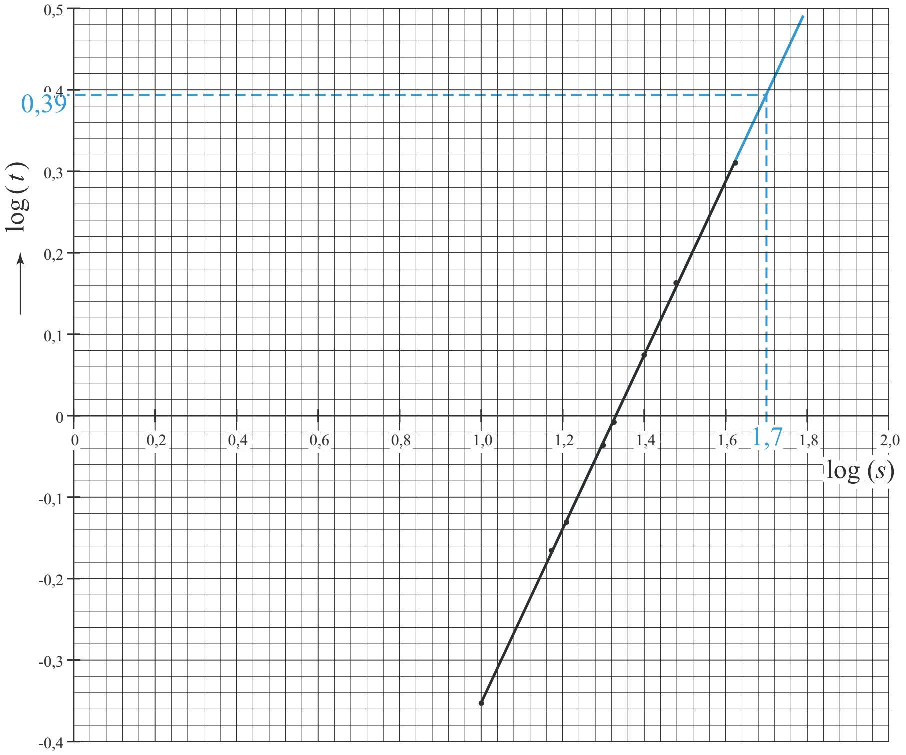
© ThiemeMeulenhoff

Hardlopen

3p **6** Als de afstand verdubbelt, wordt s_2 twee keer zo groot als s_1 dus $s_2 = 2 \cdot s_1$. [1p]
Invullen in de formule: $v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{2s_1}\right)^{0,06} = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0,06} = 0{,}9592... \cdot v_1$ [1p] dus v_2 is ongeveer 95,9% van v_1 en dat betekent een afname van ongeveer 4,1%.
De formule voldoet dus niet aan de vuistregel. [1p]

3p **7** Het wereldrecord op de marathon is 2 uur, 2 minuten en 57 seconden.
Dat zijn $2 \cdot 3600 + 2 \cdot 60 + 57 = 7377$ seconden. [1p]
Het looptempo is $\frac{7377}{42{,}195} = 174{,}8...$ seconden per kilometer. [1p]
Dat is ongeveer 2 minuten en 55 seconden per kilometer. [1p]

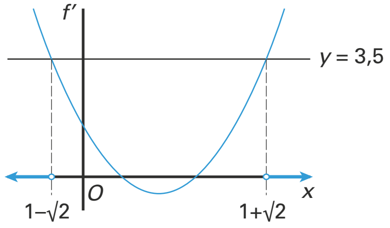
5p **8** $s = 50$ km $\Rightarrow \log(50) = 1{,}698...$ [1p]



In de figuur de grafiek iets verlengen en aflezen bij $\log(s) = 1{,}7$ [1p] geeft $\log(t) = 0{,}39$ [1p] $\Rightarrow t = 10^{0{,}39} = 2{,}45...$ uren [1p] $= 2$ uur en $0{,}45... \cdot 60$ minuten ≈ 2 uur en 27 minuten. [1p]

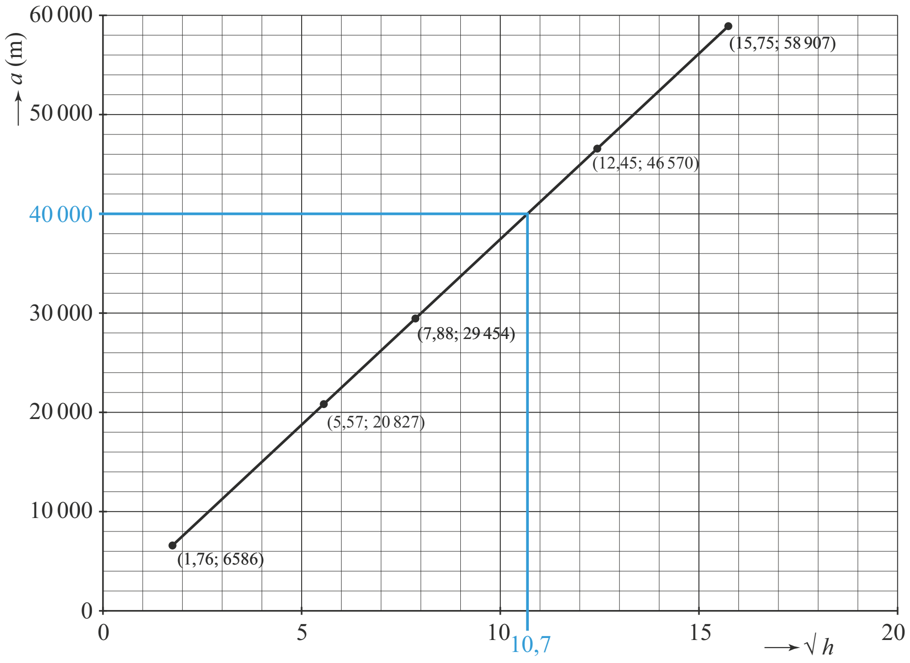
De helling

6p **9** $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot (x-1)^2 \cdot 1 - \frac{1}{2} = 2(x-1)^2 - \frac{1}{2}$ [1p]
De helling is $3\frac{1}{2}$ als $f'(x) = 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$2(x-1)^2 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ [1p] $\Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x - 1 = \sqrt{2}$ of $x - 1 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$x = 1 + \sqrt{2}$ of $x = 1 - \sqrt{2}$ [1p]
De grafiek van $f'(x)$ is een dalparabool.
Hiernaast staat een schets van de grafiek van $f'(x)$.
Aflezen met behulp van de grafiek:
$f'(x) > 3\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < 1 - \sqrt{2}$ of $x > 1 + \sqrt{2}$. [2p]



Horizonafstand

3p **10** De horizonafstand is 40 km dus $a = 40\,000$.



[1p]

Lees in de figuur bij $a = 40\,000$ de waarde van $\sqrt{h}$ af.
Dit geeft $\sqrt{h} = 10{,}7$ [1p] $\Rightarrow h = 10{,}7^2 = 114{,}49$.
Afgerond op hele meters is de kijkhoogte 114 meter. [1p]

3p **11** Uit de gegevens volgt $a = 1000k$.
Invullen in de formule geeft:
$1000k = 3741\sqrt{h}$ [1p] $\Leftrightarrow k = 3{,}741\sqrt{h} \Leftrightarrow k = \sqrt{3{,}741^2} \cdot \sqrt{h} = \sqrt{3{,}741^2 \cdot h}$ [1p] $\Rightarrow$
$c = 3{,}741^2 = 13{,}995...$ dus afgerond op helen: $c = 14$. [1p]

5p **12** 30 zeemijl is 30 · 1852 = 55 560 m dus d = 55,560 km [1p] en de kijkhoogte is h = 2 meter.
Alle gegevens invullen in de formule:
$55{,}56 = 3{,}74 \cdot (\sqrt{H} + \sqrt{2})$ [1p] $\Leftrightarrow 55{,}56 = 3{,}74\sqrt{H} + 3{,}74\sqrt{2} \Leftrightarrow 55{,}56 - 3{,}74\sqrt{2} = 3{,}74\sqrt{H} \Leftrightarrow$

$\sqrt{H} = \frac{55{,}56 - 3{,}74\sqrt{2}}{3{,}74}$ [1p] $\Rightarrow H = \left(\frac{55{,}56 - 3{,}74\sqrt{2}}{3{,}74}\right)^2 = 180{,}67...$ [1p]

De vergelijking hierboven mag met de rekenmachine worden opgelost.

$\frac{180{,}67...}{57} = 3{,}16...$ dus de lamp zou zich 3,2 keer zo hoog moeten bevinden. [1p]

Raaklijnen door de oorsprong

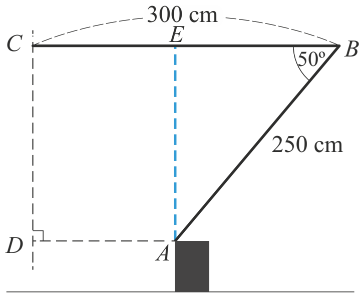
5p **13** $f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1 = (2x-3)^{-1} - x - 1 \Rightarrow$
$f'(x) = -1 \cdot (2x-3)^{-2} \cdot 2 - 1 = -\frac{2}{(2x-3)^2} - 1$ [2p]
De helling van de raaklijn k in het punt $A(1, -3)$ is $f'(1) = -\frac{2}{(2 \cdot 1 - 3)^2} - 1 = -2 - 1 = -3$. [1p]

Raaklijn k heeft een vergelijking van de vorm $y = -3x + b$. [1p]
A(1, –3) ligt op de lijn k : $y = -3x + b$ dus $-3 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 0$ dus de lijn k gaat door de oorsprong. [1p]

6p **14** Snijpunten van l en f zoeken:
$-\frac{11}{9}x = \frac{1}{2x-3} - x - 1$ [1p] (vermenigvuldig met 9) $\Leftrightarrow -11x = \frac{9}{2x-3} - 9x - 9 \Leftrightarrow$
$-2x + 9 = \frac{9}{2x-3}$ [1p] $\Rightarrow (-2x+9)(2x-3) = 9$ [1p] $\Leftrightarrow -4x^2 + 6x + 18x - 27 = 9 \Leftrightarrow$
$-4x^2 + 24x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ [1p]
dus l en f snijden elkaar alleen voor $x = 3$.
Bij $x = 3$ hoort het punt B, dus l snijdt de linkertak van de grafiek niet. [1p]

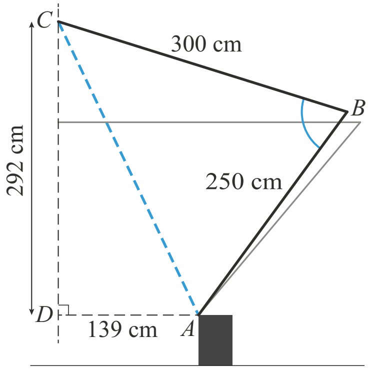
Hoogwerker

3p **15** *Rekenmachine instellen op graden.*
Teken op BC een punt E dat recht boven punt A ligt. Hoek E is dan 90°. [1p]



$\cos(\angle B) = \frac{EB}{AB} \Rightarrow \cos(50°) = \frac{EB}{250} \Rightarrow EB = 250 \cdot \cos(50°)$ [1p] $= 160{,}6... \Rightarrow$
$AD = CE = 300 - 160{,}6... = 139{,}3...$ dus afgerond is AD 139 cm. [1p]

4p **16** Teken de hulplijn AC. Driehoek ADC is rechthoekig.



Pythagoras: $AC = \sqrt{292^2 + 139^2} = \sqrt{104\,585}$ [1p]
Cosinusregel in ΔABC:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B) \Leftrightarrow$
$\left(\sqrt{104\,585}\right)^2 = 250^2 + 300^2 - 2 \cdot 250 \cdot 300 \cdot \cos(\angle B)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$104\,585 = 62\,500 + 90\,000 - 150\,000 \cdot \cos(\angle B) \Leftrightarrow$
$104\,585 - 62\,500 - 90\,000 = -150\,000 \cdot \cos(\angle B) \Leftrightarrow$

$\cos(\angle B) = \frac{-47\,915}{-150\,000} = 0{,}319... \Rightarrow \angle B = 71{,}37...°$ [1p] $\Rightarrow$

$\angle B$ is door de beweging van de hoogwerker met 71,37... – 50 ≈ 21° toegenomen. [1p]

(Co)sinus

4p **17** De lijn l snijdt de grafiek van f als geldt:
$2 + 3\sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3\sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}$ [1p] $\Leftrightarrow \sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \Leftrightarrow$

$\pi\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi\left(x + \frac{1}{4}\right) = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ [1p] $\Leftrightarrow$

$\pi x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$

$\pi x = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$ (delen door π)

$x = -\frac{1}{12} + k \cdot 2$ of $x = \frac{7}{12} + k \cdot 2$ [1p]

De oplossingen op het gegeven domein zijn $x = 1\frac{11}{12}$ en $x = \frac{7}{12}$. [1p]

5p **18** De periode van g is 4 dus $r = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$. [1p]

De amplitude van f is 3 en die van g is twee keer zo groot dus $q = 6$. [1p]

De periode van f is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

De grafiek van f is een sinus die voor $x = -\frac{1}{4}$ stijgend door de evenwichtsstand gaat, dus f bereikt een kwart periode later een hoogste punt. De coördinaten van dat hoogste punt zijn $\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2;\ 2 + 3\right) = \left(\frac{1}{4}, 5\right)$. [1p] Dit punt is ook het hoogste punt van de cosinusgrafiek van g dus $s = \frac{1}{4}$. [1p]

Het maximum van g is 5 en de amplitude is 6 dus de evenwichtsstand is $p = -1$. [1p]

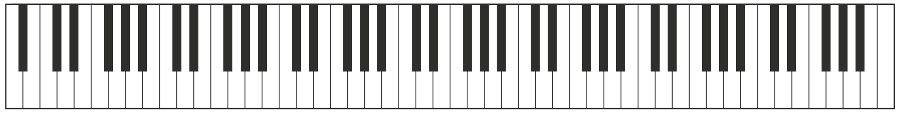
Samengevat: $p = -1$; $q = 6$; $r = \frac{1}{2}\pi$ en $s = \frac{1}{4}$.

Examen 2018-II

Piano

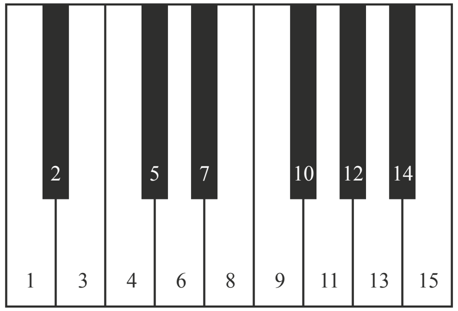
In figuur 1 zijn de witte en zwarte toetsen van een gewone piano getekend. In totaal heeft deze piano 88 toetsen.

figuur 1



De toetsen worden genummerd van links naar rechts. Zie figuur 2, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende volgnummers zijn getekend.

figuur 2 toetsen met volgnummers



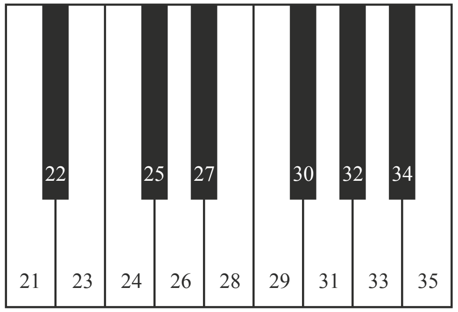
De tonen die met de toetsen van de piano voortgebracht worden, hebben verschillende frequenties. Hoe verder een toets naar rechts zit, hoe groter de frequentie van de bijbehorende toon. Bij de toets met volgnummer 1 hoort een toon met een frequentie van 27,5 Hz (hertz). Bij de toets met volgnummer 49 hoort een toon met een frequentie van 440 Hz.

Het verband tussen het volgnummer van een toets en de frequentie van de bijbehorende toon is exponentieel. Dus: wanneer je achtereenvolgens de toetsen van links naar rechts bespeelt, neemt de frequentie van de opeenvolgende tonen telkens met hetzelfde percentage toe.

4p **1** Bereken algebraïsch dit percentage in twee decimalen nauwkeurig.

In de twintigste eeuw is de digitale piano ontwikkeld. Dit instrument, dat ook 88 toetsen heeft, bootst een gewone piano na. Bij digitale piano's wordt een andere nummering voor de toetsen gebruikt: elke toets van de digitale piano heeft een zogeheten **MIDI-nummer**. Zie figuur 3, waarin de eerste vijftien toetsen met de bijbehorende MIDI-nummers zijn getekend.

figuur 3 toetsen met MIDI-nummers



De frequentie van de toon die bij een bepaalde toets hoort, kan worden berekend met de volgende formule:

$f = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(m-69)}$

Hierin is f de frequentie van de toon in Hz en m het MIDI-nummer van de bijbehorende toets.

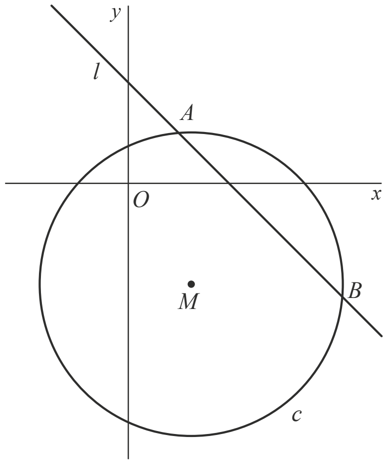
Algemeen wordt gesteld dat het menselijk gehoor in staat is om tonen met een frequentie tussen 20 Hz en 20 000 Hz waar te nemen. Iemand wil daarom de digitale piano uitbreiden met een aantal toetsen met MIDI-nummers zodat zoveel mogelijk tonen met frequenties tussen 20 Hz en 20 000 Hz voorkomen.

5p **2** Bereken met bovenstaande formule hoeveel toetsen zo'n piano dan zal hebben.

Twee paren punten op een cirkel

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door de vergelijking
$x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$. Lijn l is de lijn door het punt $A(4, 4)$ met richtingscoëfficiënt –1.
Deze lijn snijdt de cirkel behalve in het punt A ook in het punt B. Zie figuur 1.

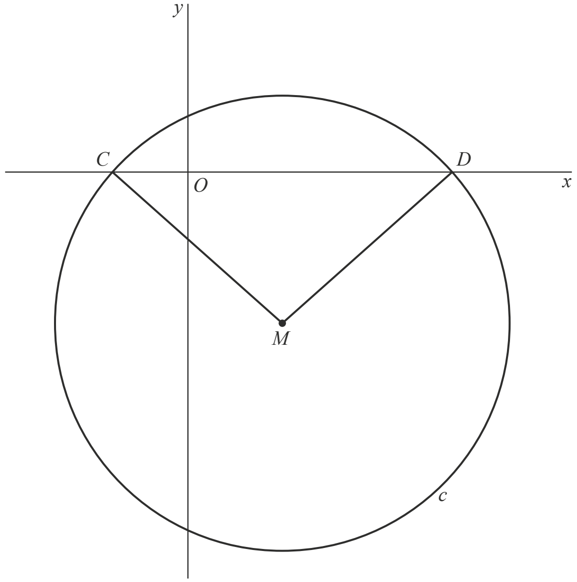
figuur 1



5p **3** Bereken exact de coördinaten van B.

De cirkel heeft twee snijpunten met de x-as. Dit zijn de punten $C(-4, 0)$ en $D(14, 0)$.
In figuur 2 zijn de stralen MC en MD getekend.

figuur 2



6p **4** Bereken $\angle CMD$. Geef je eindantwoord in graden en rond af op één decimaal. Je kunt hierbij figuur 2 gebruiken.

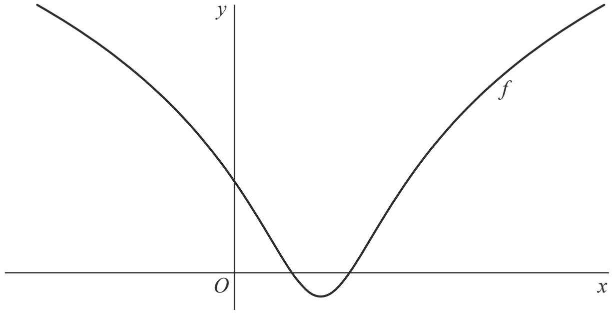
Logaritme van een kwadratische functie

De functie f wordt gegeven door:

$f(x) = {}^2\log(x^2 - 3x + 3)$

In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

figuur 1

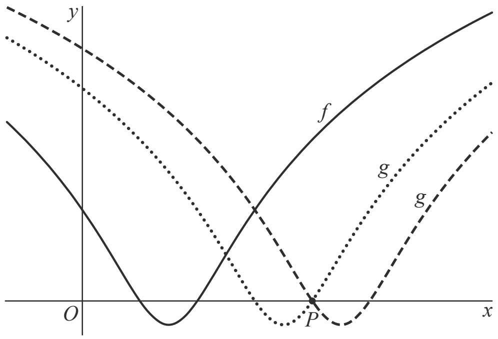


De grafiek van f lijkt geen verticale asymptoot te hebben. De grafiek van de standaardfunctie $y = {}^2\log(x)$ heeft wél een verticale asymptoot.

3p **5** Bewijs dat de grafiek van f inderdaad geen verticale asymptoot heeft.

Gegeven is het punt $P(4, 0)$.
De grafiek van f wordt over een afstand a naar rechts verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van g door P gaat. Zie figuur 2.

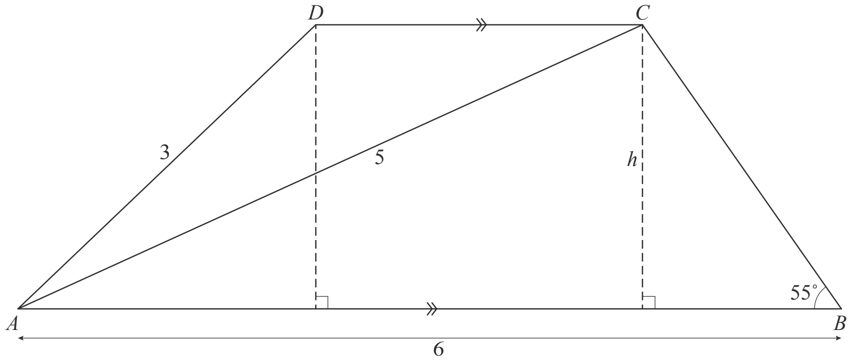
figuur 2



5p **6** Bereken exact deze twee waarden van a.

Trapezium

Een **trapezium** is een vierhoek met twee evenwijdige zijden.
Gegeven is trapezium *ABCD* waarvan de zijden *AB* en *CD* evenwijdig zijn.
Verder geldt: $AB = 6$, $AC = 5$, $AD = 3$, $\angle B = 55°$ en $\angle ACB > 90°$.
De afstand tussen *AB* en *CD*, de hoogte van het trapezium, is *h*.
Zie de figuur.



Afgerond op twee decimalen is $\angle BAC$ gelijk aan 24,41°.

4p **7** Bereken $\angle BAC$ algebraïsch en rond je eindantwoord af op drie decimalen.

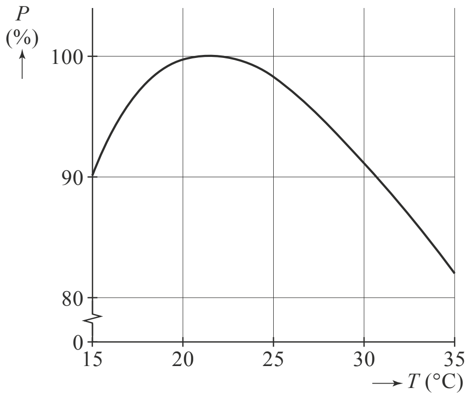
De oppervlakte van het trapezium is te berekenen met de volgende formule:

$$\text{oppervlakte} = h \cdot \frac{AB + CD}{2}$$

5p **8** Bereken de oppervlakte van het trapezium met behulp van deze formule. Rond je eindantwoord af op één decimaal.

Productiviteit

Werken op een hete zomerdag kost meer moeite dan op een dag met een temperatuur van een graad of twintig. In deze opgave kijken we hoe de omgevingstemperatuur invloed heeft op de **productiviteit**. Met dit begrip bedoelen we: de hoeveelheid werk die een mens gemiddeld verzet.
Op de Helsinki University of Technology is hier onderzoek naar gedaan.



De resultaten van het onderzoek zijn verwerkt in de grafiek in de figuur. De productiviteit *P* op de verticale as geeft aan hoe hoog de productiviteit is ten opzichte van de maximale productiviteit. Zo zie je dat bij een temperatuur van 15 °C de productiviteit 90% is van wat maximaal mogelijk is.

De grafiek in de figuur kan worden benaderd met de volgende formule:

$$P = 0{,}00623T^3 - 0{,}58274T^2 + 16{,}47524T - 46{,}76666$$

Hierbij is *P* de productiviteit in procenten ten opzichte van de maximale productiviteit en *T* de temperatuur in graden Celsius (°C). De formule geldt voor $15 \le T \le 35$.
De temperatuur waarbij de productiviteit volgens de formule maximaal is, noemt men de **ideale temperatuur**.
Iemand vraagt zich af door welke verandering van de temperatuur de productiviteit het meest afneemt:
- twee graden daling ten opzichte van de ideale temperatuur

óf
- twee graden stijging ten opzichte van de ideale temperatuur

4p **9** Onderzoek, zonder gebruik te maken van de figuur, door welke van deze twee veranderingen de productiviteit het meest afneemt.

Voor temperaturen vanaf 30 °C tot en met 35 °C kan *P* goed benaderd worden door een formule van de volgende vorm:

$$P_{benaderd} = a \cdot T + b$$

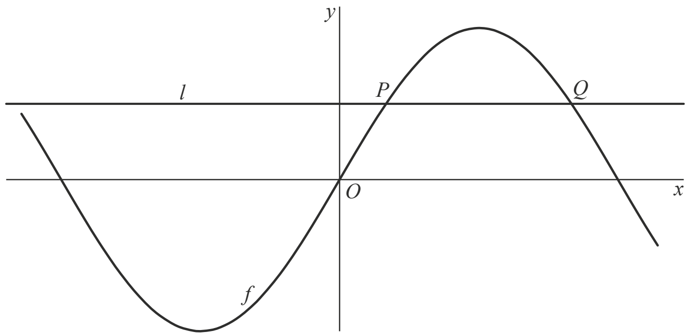
Hierbij kunnen *a* en *b* zo gekozen worden dat $P_{benaderd}$ voor $T = 30$ en $T = 35$ dezelfde uitkomsten geeft als de formule voor *P*.

3p **10** Bereken deze waarden van *a* en *b*. Rond in je eindantwoord *a* af op drie decimalen en *b* op één decimaal.

Sinus

Op het domein $\left[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right]$ wordt de functie *f* gegeven door $f(x) = 3\sin(\pi x)$.
De lijn *l* is de lijn met vergelijking $y = \frac{3}{2}$. Lijn *l* snijdt de grafiek van *f* in de punten *P* en *Q*. Zie figuur 1.

figuur 1



3p **11** Bereken exact de *x*-coördinaten van *P* en *Q*.

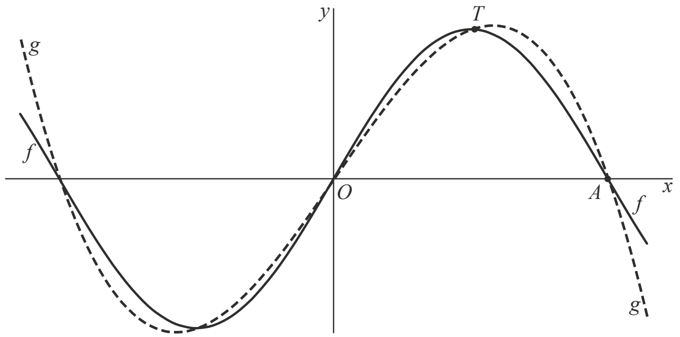
De grafiek van *f* snijdt de positieve *x*-as in het punt *A*. De grafiek van *f* heeft een top rechts van de *y*-as. Dit is punt *T*. De punten *A* en *T* zijn in figuur 2 aangegeven.

Er bestaat één derdegraadsfunctie *g* waarvoor geldt:
- het functievoorschrift is van de vorm $g(x) = ax^3 + bx$

én
- de grafiek gaat door *A* en *T*.

De grafiek van *g* is gestippeld getekend in figuur 2.

figuur 2



Uit bovenstaande gegevens volgt: $a + b = 0$ en $\frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$.

4p **12** Toon dit aan.

3p **13** Bereken exact de waarden van *a* en *b*.

Gebroken functies

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies *f* en *g* gegeven door:

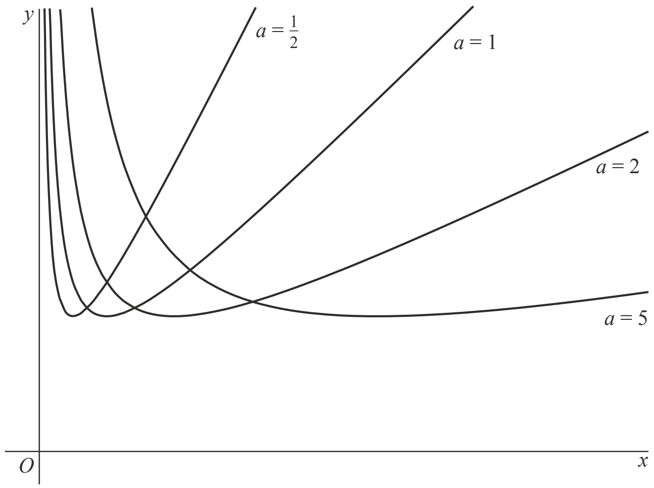
$f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

Op het gegeven domein hebben de grafieken van *f* en *g* één snijpunt.

4p **14** Bereken exact de *x*-coördinaat van dit snijpunt.

De functies *f* en *g* zijn voorbeelden van functies met een functievoorschrift van de vorm $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$ met $a > 0$ en domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$.
In figuur 1 is voor een aantal waarden van *a* de grafiek van *h* getekend.

figuur 1



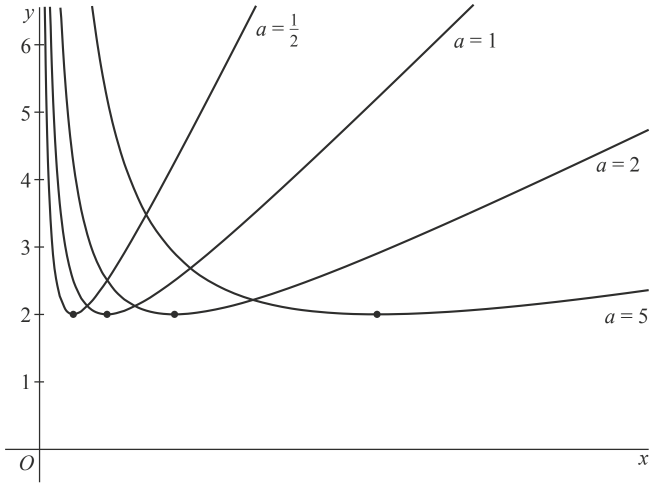
De afgeleide van *h* wordt gegeven door:

$$h'(x) = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$$

3p **15** Bewijs dit.

Voor elke waarde van *a* heeft de grafiek van *h* één top. In figuur 2 is voor enkele waarden van *a* de top met een stip aangegeven.

figuur 2



De *y*-coördinaat van elke top in figuur 2 is gelijk aan 2.

Het is zelfs zo dat voor **elke** waarde van *a* (met $a > 0$) de *y*-coördinaat van de top van de grafiek van *h* gelijk is aan 2.

4p **16** Bewijs dit.

Macht en lijnen

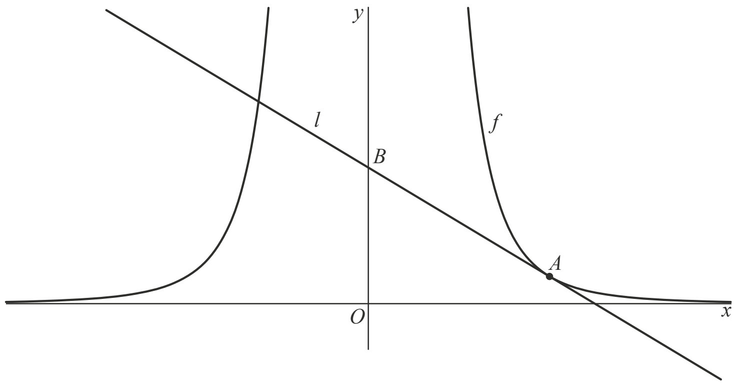
De functie *f* is gegeven door:

$f(x) = \frac{3}{16x^4}$

De horizontale lijn met vergelijking $y = \frac{1}{32}$ snijdt de grafiek van *f* in twee punten.

3p **17** Bereken exact de afstand tussen deze twee punten.

Op de grafiek van *f* ligt het punt $A\left(1, \frac{3}{16}\right)$. De lijn *l* is de raaklijn aan de grafiek van *f* in het punt *A*. Lijn *l* snijdt de *y*-as in punt *B*. Zie de figuur.



5p **18** Bereken exact de *y*-coördinaat van *B*.

Hints bij examen 2018-II

1 Bereken de factor waarmee de frequentie wordt vermenigvuldigd tussen toets 1 en toets 49. Bereken hiermee de factor tussen twee opeenvolgende toetsen.

2 Zoek in een tabel op de rekenmachine naar toetsen die aan de eisen voldoen. Als je met *intersect/snijpunt* werkt, moet je de gevonden decimale getallen verstandig afronden.

3 Stel een vergelijking van de lijn l op en substitueer deze vervolgens in de vergelijking van de cirkel.

4 Bereken middelpunt en straal met behulp van kwadraatafsplitsen. Gebruik daarna een hulplijn of de cosinusregel.

5 Er is een verticale asymptoot als $x^2 - 3x + 3 = 0$.

6 Bereken exact de nulpunten van f. Bepaal vervolgens hoever zo'n nulpunt naar rechts verschoven moet worden om in P terecht te komen.

7 Gebruik de sinusregel om de hoeken van ΔABC te berekenen. Let op dat $\angle BCA > 90°$.

8 h kan direct in een rechthoekige driehoek berekend worden. Bereken ook de drie stukken waarin AB is verdeeld.

9 Bereken de ideale temperatuur met behulp van de optie *maximum* op de rekenmachine. Bereken vervolgens de productiviteit bij temperaturen die twee graden lager en twee graden hoger liggen.

10 a is de richtingscoëfficiënt van het lineaire verband P_{benaderd} dus $a = \frac{P(35) - P(30)}{35 - 30}$.
Rond alle berekende waarden pas op het laatst af.

11 Gebruik de formule $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi$ of $a = \pi - b + k \cdot 2\pi$.

12 Gebruik periode en amplitude van de grafiek van f om de coördinaten van A en T te berekenen. Vul de coördinaten van deze punten in g in.

13 Los het stelsel op bijvoorbeeld door substitutie.

14 $f(x) = g(x)$ moet algebraïsch worden opgelost.

15 Herschrijf h in een handiger vorm en differentieer. Gebruik de regel $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

16 In de toppen is de helling van de raaklijn gelijk aan nul. Los $h'(x) = 0$ op en vul de gevonden x-waarde in h in.

17 Gebruik kruislings vermenigvuldigen: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

18 Lijn l heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ waarin $a = f'(1)$ en b is de gezochte y-coördinaat van punt B.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2018-II

Piano

4p **1** Bij toets 1 hoort een frequentie van 27,5 Hz en bij toets 49 hoort 440 Hz.
In 48 stappen stijgt de frequentie met factor $\frac{440}{27{,}5}$ [1p] = 16 dus de factor per toets is $16^{\frac{1}{48}}$ [1p] = 1,05946... . [1p] De frequentie stijgt per toets met ongeveer 5,95%. [1p]

5p **2** Voer in de rekenmachine in $y_1 = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}(x-69)}$ en zoek in een tabel het laagste MIDI-nummer met frequentie groter dan 20 Hz en het hoogste MIDI-nummer met frequentie kleiner dan 20 000 Hz. [1p]

x	y_1
15	19,445
16	20,602
.	.
.	.
.	.
135	19 912
136	21 096

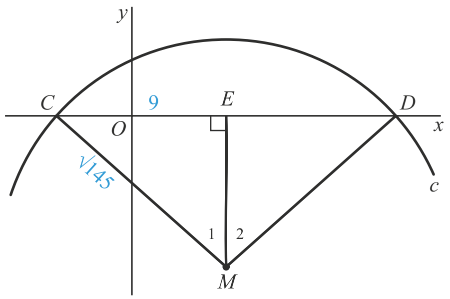
[2p]

Zo'n piano zou de toetsen met MIDI-nummers 16 t/m 135 hebben. [1p] Dat zijn 120 toetsen. [1p]

Twee paren punten op een cirkel

5p **3** Lijn l heeft richtingscoëfficiënt –1 en gaat door het punt (4, 4).
Vul de coördinaten van (4, 4) in in $y = -1x + b \Rightarrow 4 = -4 + b \Leftrightarrow b = 8$
Een vergelijking van l is $y = -x + 8$. [1p]
Nu $y = -x + 8$ substitueren in de vergelijking van c om de snijpunten te berekenen:
$x^2 + (-x+8)^2 - 10x + 16(-x+8) = 56$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x^2 + x^2 - 16x + 64 - 10x - 16x + 128 = 56 \Leftrightarrow$
$2x^2 - 42x + 136 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x^2 - 21x + 68 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-4)(x-17) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x = 4$ of $x = 17$
$x = 4$ geeft $A(4, 4)$. Dit snijpunt was al gegeven.
$x = 17$ geeft $y = -17 + 8 = -9$ dus het andere snijpunt is $B(17, -9)$. [1p]

6p **4** *Rekenmachine instellen op graden.*
Kwadraatafsplitsen:
$x^2 - 10x + y^2 + 16y = 56 \Leftrightarrow$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 16y + 64 = 56 + 25 + 64 \Leftrightarrow$
$(x-5)^2 + (y+8)^2 = 145$ [1p]
dus het middelpunt van c is $M(5, -8)$ en de straal is $\sqrt{145}$. [1p]
Teken E precies midden tussen C en D.
Dan is $\angle CEM = \angle DEM = 90°$ en $\angle M_1 = \angle M_2$.



$CD = 14 - (-4) = 18$ [1p] $\Rightarrow$ $CE = 9$
CM = straal = $\sqrt{145}$
In ΔCEM: $\sin(\angle M_1) = \frac{9}{\sqrt{145}}$ [1p] = 0,747... $\Rightarrow$
$\angle M_1 = 48{,}3...°$ [1p] $\Rightarrow \angle CMD = 2 \cdot 48{,}3...° \approx 96{,}7°$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

andere manier zonder hulppunt E (eerste 3 punten zoals hierboven)
cosinusregel in ΔCMD:
$CD^2 = CM^2 + DM^2 - 2 \cdot CM \cdot DM \cdot \cos(\angle CMD) \Leftrightarrow$
$18^2 = \sqrt{145}^2 + \sqrt{145}^2 - 2 \cdot \sqrt{145} \cdot \sqrt{145} \cdot \cos(\angle CMD)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$324 = 145 + 145 - 290 \cdot \cos(\angle CMD) \Leftrightarrow$
$\cos(\angle CMD) = \frac{324 - 145 - 145}{-290} = -0{,}117...$ [1p] $\Rightarrow \angle CMD = 96{,}73...^\circ \approx 96{,}7^\circ$ [1p]

Logaritme van een kwadratische functie

3p **5** Er is een verticale asymptoot als $x^2 - 3x + 3 = 0$. [1p]
Discriminant $= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3$. [1p]
De discriminant is negatief dus $x^2 - 3x + 3$ is groter dan 0 voor elke waarde van x.
Er is dan geen verticale asymptoot. [1p]

5p **6** Eerst de nulpunten van f berekenen.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow {}^2\log(x^2 - 3x + 3) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 2^0 = 1$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x = 1$ of $x = 2$ [1p]
Om (1, 0) naar $P(4, 0)$ te verschuiven moet a gelijk zijn aan 3, en om (2, 0) naar $P(4, 0)$ te verschuiven moet a gelijk zijn aan 2.
Voor $a = 2$ en $a = 3$ gaat de verschoven grafiek door P. [1p]

Trapezium

4p **7** *Rekenmachine instellen op graden.*
Sinusregel in ΔABC:
$\frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle BCA)} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin(55^\circ)} = \frac{6}{\sin(\angle BCA)}$ [1p] $\Leftrightarrow \sin(\angle BCA) = \frac{6\sin(55^\circ)}{5} = 0{,}982...$ [1p] $\Rightarrow$
$\angle BCA = 79{,}4146...^\circ$ maar deze oplossing voldoet niet aan de eis $\angle BCA > 90^\circ$ dus moet $\angle BCA = 90^\circ + (90^\circ - 79{,}4146...^\circ) = 100{,}5853...^\circ$ zijn. [1p]
Hieruit volgt $\angle BAC = 180^\circ - 55^\circ - 100{,}5853...^\circ = 24{,}4146...^\circ \approx 24{,}415^\circ$. [1p]

5p **8** De projecties van D en C op AB noemen we D' en C'.
In $\Delta ACC'$: $\sin(24{,}415^\circ) = \frac{h}{5} \Rightarrow h = 5 \cdot \sin(24{,}415^\circ) = 2{,}066...$ [1p]
In $\Delta BCC'$: $\tan(55^\circ) = \frac{2{,}066...}{BC'} \Rightarrow BC' = \frac{2{,}066...}{\tan(55^\circ)} = 1{,}447...$ [1p]
Pythagoras in $\Delta ADD'$:
$(AD')^2 + h^2 = AD^2 \Rightarrow (AD')^2 = AD^2 - h^2 = 3^2 - (2{,}066...)^2 = 4{,}728... \Rightarrow AD' = 2{,}174...$ [1p]
Hieruit volgt $DC = D'C' = 6 - 2{,}174... - 1{,}447... = 2{,}378....$ [1p]
De oppervlakte van het trapezium is $2{,}066... \cdot \frac{6 + 2{,}378...}{2} = 8{,}657....$
Afgerond op één decimaal is de oppervlakte 8,7. [1p]
Je mag in deze vraag rekenen met 24,41°, met 24,415° of met 24,4146...°. In elk van deze gevallen komt de oppervlakte in een decimaal uit op 8,7.

Productiviteit

4p **9** Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}00623x^3 - 0{,}58274x^2 + 16{,}47524x - 46{,}76666$ en gebruik de optie *maximum*. [1p]
De ideale temperatuur, waarbij het maximum wordt bereikt, is $T = 21{,}65...$ °C . [1p]
Twee graden lager: $P(19{,}65...) = 99{,}23...\%$
Twee graden hoger: $P(23{,}65...) = 99{,}33...\%$ [1p]
Bij een daling van twee graden ten opzichte van de ideale temperatuur neemt de productiviteit het meest af. [1p]

3p **10** $P(30) = 91{,}2345...$ en $P(35) = 83{,}1214...$ [1p]
a is de richtingscoëfficiënt van het lineaire verband $P_{benaderd}$ dus
$a = \frac{P(35) - P(30)}{35 - 30} = \frac{83{,}1214... - 91{,}2345...}{5} = -1{,}6226...$ [1p]
De coordinaten van (30; 91,2345...) invullen in $P_{benaderd} = -1{,}6226... \cdot T + b$ geeft
$91{,}2345... = -1{,}6226... \cdot 30 + b \Leftrightarrow b = 139{,}912...$
De afgeronde waarden zijn: $a = -1{,}623$ en $b = 139{,}9$ [1p]

Sinus

3p **11** $f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\sin(\pi x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \frac{1}{2}$ [1p] $\Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin(\frac{1}{6}\pi) \Leftrightarrow$
$\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ [1p] $\Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{6} + k \cdot 2$ of $x = \frac{5}{6} + k \cdot 2$
P en Q liggen in het domein $\left[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right]$ dus de x-coördinaat van P is $\frac{1}{6}$ en de x-coördinaat van Q is $\frac{5}{6}$. [1p]

4p **12** De periode van de grafiek van f is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$. [1p]
Omdat de grafiek door de oorsprong gaat, zijn de coördinaten van $A(1, 0)$. [1p]
De x-coördinaat van T is dus $\frac{1}{2}$. De amplitude van de grafiek is 3 dus de coördinaten van T zijn $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. [1p]
De coördinaten van $A(1, 0)$ invullen in g geeft: $g(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$.
En $T\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ invullen in g geeft: $g\left(\frac{1}{2}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b \cdot \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b = 3$. [1p]

3p **13** Uit $a + b = 0$ volgt $a = -b$.
Substitutie van $a = -b$ in de andere vergelijking geeft $\frac{1}{8} \cdot -b + \frac{1}{2}b = 3$ [1p] $\Leftrightarrow$
(vermenigvuldig met 8) $-b + 4b = 24 \Leftrightarrow 3b = 24 \Leftrightarrow b = 8$ [1p] en dus $a = -8$. [1p]

Gebroken functies

4p **14** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ [1p] $\Leftrightarrow x - \frac{x}{4} = \frac{4}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{3}{x}$ [1p] $\Leftrightarrow$

(vermenigvuldig met 4) $3x = \frac{12}{x} \Rightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4$ [1p] $\Leftrightarrow x = 2$ of $x = -2$

Op het domein ⟨0, →⟩ is de x-coördinaat van het snijpunt gelijk aan 2. [1p]

3p **15** $h(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a}x + ax^{-1} \Rightarrow$

$h'(x) = \frac{1}{a} - 1ax^{-2}$ [1p] $= \frac{1}{a} - a \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}$ [1p] $= \frac{x^2}{ax^2} - \frac{a^2}{ax^2} = \frac{x^2 - a^2}{ax^2}$ [1p]

4p **16** In de toppen is de afgeleide gelijk aan nul dus:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - a^2}{ax^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a$ of $x = -a$

Omdat $a > 0$ geldt voor de toppen op het domein ⟨0, →⟩ dat $x = a$. [1p]

Invullen in h geeft $h(a) = \frac{a}{a} + \frac{a}{a}$ [1p] $= 1 + 1 = 2$ dus de y-coördinaat van de top van de grafiek van h is voor elke a gelijk aan 2. [1p]

Macht en lijnen

3p **17** $y = \frac{1}{32}$ snijdt $f(x) = \frac{3}{16x^4}$ als $\frac{3}{16x^4} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 16x^4 = 96 \Leftrightarrow$

$x^4 = 6$ [1p] $\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{6}$ of $x = -\sqrt[4]{6}$ [1p]

De exacte afstand tussen de snijpunten is $2 \cdot \sqrt[4]{6}$. [1p]

5p **18** $f(x) = \frac{3}{16x^4} = \frac{3}{16}x^{-4}$ [1p] $\Rightarrow f'(x) = -4 \cdot \frac{3}{16}x^{-5}$ [1p] $= -\frac{12}{16} \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{3}{4x^5}$

De raaklijn l in het punt $A\left(1, \frac{3}{16}\right)$ heeft een vergelijking van de vorm $y = ax + b$

waarin $a = f'(1) = -\frac{3}{4 \cdot 1^5} = -\frac{3}{4}$. [1p]

De coördinaten van $A\left(1, \frac{3}{16}\right)$ invullen in $y = -\frac{3}{4}x + b$ [1p] geeft:

$\frac{3}{16} = -\frac{3}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{16} + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} + \frac{12}{16} = \frac{15}{16}$

Punt B ligt op de y-as dus de y-coördinaat van B is $\frac{15}{16}$. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Examen 2019-I

Formule van Wilson

De geluidssnelheid in zeewater kan worden benaderd met de formule van Wilson:

$$v = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391(Z - 35) + \frac{D}{60}$$

Hierin is
- v de geluidssnelheid in m/s;
- T de watertemperatuur in °C;
- Z het zoutgehalte van het zeewater in promille (‰);
- D de waterdiepte in m.

In enkele gesloten zeeën (zoals de Kaspische Zee en de Dode Zee) wijkt het zoutgehalte sterk af van het zoutgehalte van open zeeën. Zo is het zoutgehalte van de Dode Zee met 337‰ ongeveer 10 keer zo hoog als het zoutgehalte van gewoon zeewater.
De Kaspische Zee is met een gemiddeld zoutgehalte van 12‰ veel minder zout dan gewoon zeewater.

3p **1** Bereken bij gelijke watertemperatuur (T) en gelijke waterdiepte (D) het verschil tussen de geluidssnelheid in de Dode Zee en in de Kaspische Zee. Geef je eindantwoord in een geheel aantal m/s.

Bij een bepaalde watertemperatuur zal de geluidssnelheid in zeewater maximaal zijn. Deze watertemperatuur is onafhankelijk van de waterdiepte en het zoutgehalte. Daarom mogen Z en D als constanten worden beschouwd bij het berekenen van deze watertemperatuur.

3p **2** Bereken algebraïsch de temperatuur in graden Celsius waarbij de geluidssnelheid in zeewater maximaal is. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Vanuit een onderzeeboot kan men door middel van een sonarapparaat afstanden bepalen. Hiervoor zendt de onderzeeboot een geluidssignaal uit. Door een ander object in het water wordt dit signaal teruggekaatst. Men meet het tijdsverschil tussen het moment van uitzenden van het signaal en het moment waarop het teruggekaatste signaal weer ontvangen wordt.

Een onderzeeboot en een object bevinden zich op 20 meter diepte in zeewater van 10 °C met een zoutgehalte van 35‰. De onderzeeboot zendt een geluidssignaal uit, dat door het object wordt teruggekaatst; 12,45 seconden nadat het is uitgezonden wordt het teruggekaatste signaal weer opgevangen.

3p **3** Bereken hoe ver het object van de onderzeeboot verwijderd is. Geef je eindantwoord in honderden meters.

Ingeklemd

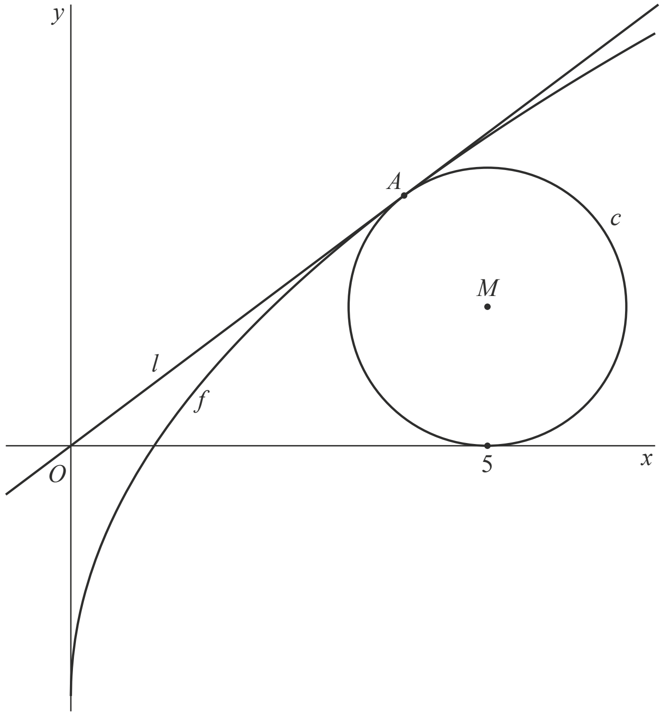
De functie f is gegeven door $f(x) = -3 + 3\sqrt{x}$.
Het punt A (4, 3) ligt op de grafiek van f.

Verder is de lijn l met vergelijking $y = \frac{3}{4}x$ gegeven.

Lijn l raakt de grafiek van f in A.

4p **4** Bewijs dit.

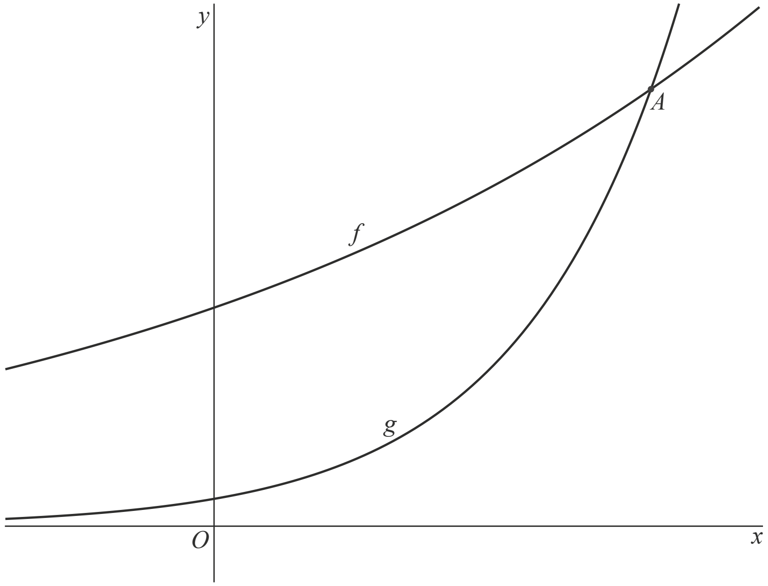
De cirkel c heeft middelpunt M met $x_M = 5$.
Bovendien raakt lijn l cirkel c in punt A. Zie de figuur.



5p **5** Bewijs dat c de x-as raakt.

Twee exponentiële functies

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x+3}$ en $g(x) = 4^x$.
Het punt A is het snijpunt van de grafieken van f en g. Zie de figuur.



4p **6** Bereken exact de coördinaten van A.

Bij de grafiek van f hoort de formule $y = 2^{\frac{1}{2}x+3}$.
Deze formule kan worden herschreven zodat x wordt uitgedrukt in y.

3p **7** Druk x uit in y.

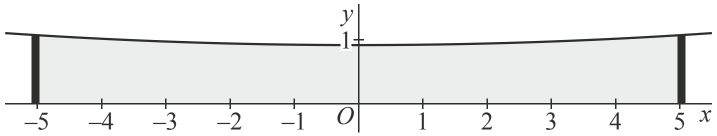
In of uit

Bij tennis is het net aan de zijkanten hoger dan in het midden. Zie de foto.

De bovenrand van het net hangt aan de zijkanten op een hoogte van 1,07 meter en in het midden op een hoogte van 0,91 meter.
Het net is 10,06 meter breed.

We plaatsen dit net in een assenstelsel met het midden van het net op de y-as en de onderkant van het net op de x-as. Zie figuur 1.

figuur 1



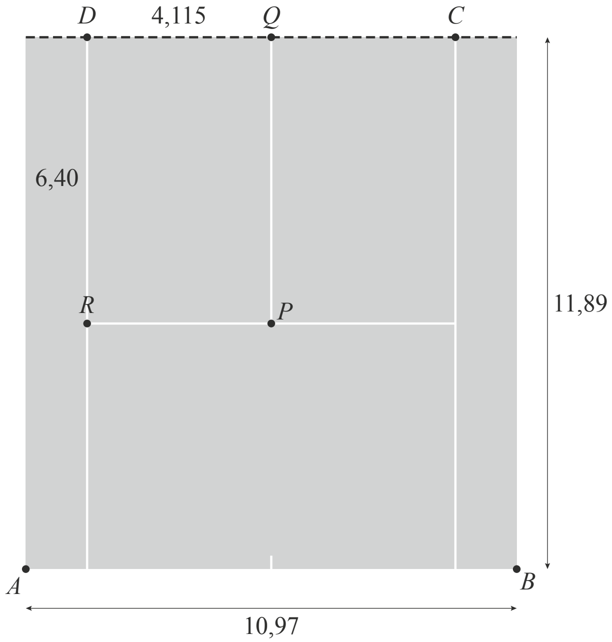
De hoogte y van een willekeurig punt op de bovenrand van het net is te benaderen door een parabool met een formule van de vorm $y = px^2 + q$ met $-5{,}03 \leq x \leq 5{,}03$.
Hierbij zijn x en y in meters.

4p **8** Bereken de waarden van p en q die uit de gegevens volgen. Geef p in drie decimalen en q in twee decimalen.

Bij tennis is het soms moeilijk om te beoordelen of een bal binnen of buiten de lijnen de grond raakt. Vaak wordt met behulp van camera's vastgesteld waar een bal de grond raakt.

Om een idee te krijgen hoe zo'n systeem werkt, bekijken we een sterk vereenvoudigd tweedimensionaal model met twee camera's. In figuur 2 is een bovenaanzicht van één helft van het rechthoekige speelveld weergegeven. Bovendien zijn in deze figuur enkele maten gegeven. Alle maten zijn in meters.
Ook zijn de witte lijnen op het speelveld aangegeven. In het vervolg van deze opgave verwaarlozen we de breedte van deze lijnen. De bal beschouwen we als een punt.

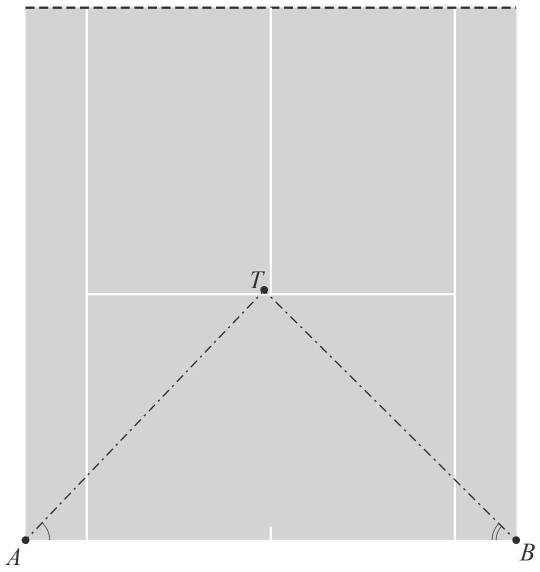
figuur 2



In figuur 2 geldt:
- de stippellijn door CD geeft de plaats van het net aan;
- de lengte van de achterlijn AB is 10,97 m;
- de afstand van de achterlijn tot aan het net is 11,89 m;
- DQ = 4,115 m en DR = 6,40 m;
- rechthoek $PQDR$ is het servicevak, waarin de bal volgens de regels van het spel na de eerste slag op de grond moet komen.

In figuur 3 is hetzelfde speelveld als in figuur 2 nogmaals weergegeven. De camera's zijn boven de punten *A* en *B* gemonteerd.

figuur 3



In figuur 3 geldt:
- *A* is de positie van camera 1 en *B* is de positie van camera 2;
- het punt *T* is de plaats waar de bal na de eerste slag op de grond komt;
- ∠*A* is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 1 de bal waarneemt;
- ∠*B* is de hoek ten opzichte van de achterlijn waaronder camera 2 de bal waarneemt;
- In de situatie zoals weergeven in figuur 3 is de bal nog net in het servicevak *PQDR* op de grond gekomen.

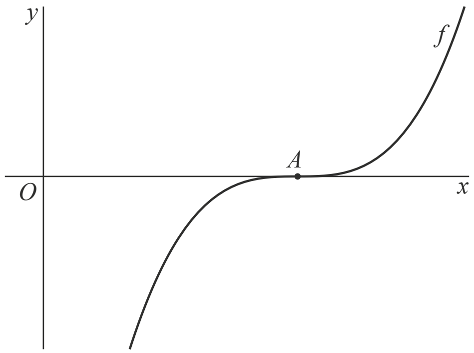
We bekijken nu een andere situatie, waarbij ∠*A* = 45,4° en ∠*B* = 44,2°.

6p **9** Onderzoek met behulp van een berekening of in deze situatie de bal in rechthoek *PQDR* op de grond is gekomen.

Grafiek van een derdegraadsfunctie en een lijn

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3$. Zie figuur 1.

figuur 1



De functie *g* is gegeven door $g(x) = x^3$. De grafiek van *f* ontstaat uit de grafiek van *g* door twee transformaties na elkaar toe te passen.

3p **10** Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn **en** in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

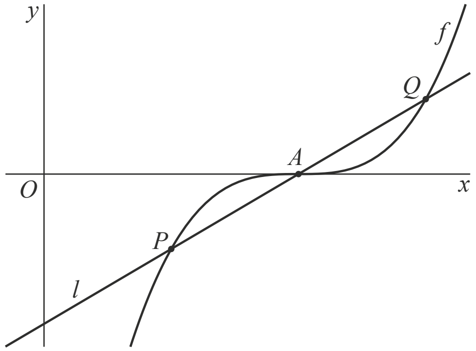
De grafiek van *f* snijdt de *x*-as in het punt *A*. Zie figuur 1.

De grafiek van *f* heeft een horizontale raaklijn in *A*.

5p **11** Bewijs dit.

De lijn *l* met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 2$ snijdt de grafiek van *f* behalve in punt *A* ook in de punten *P* en *Q*. Zie figuur 2.

figuur 2



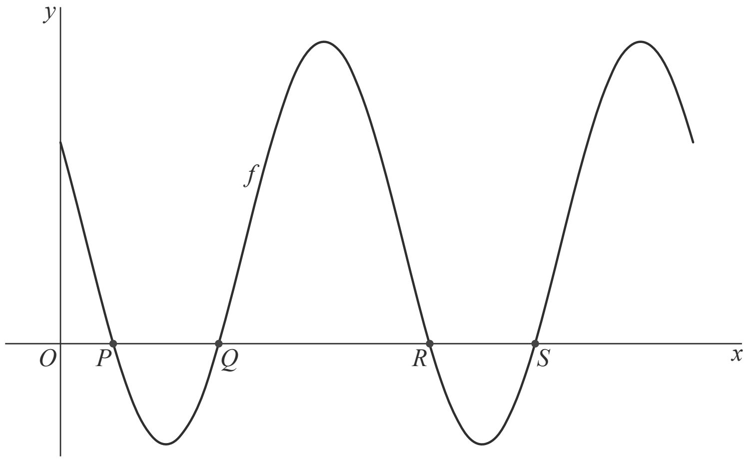
3p **12** Bereken de lengte van *PQ*. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Sinusoïden

Op het domein [0, 2π] is de functie *f* gegeven door:

$$f(x) = 1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

De grafiek van *f* snijdt de *x*-as achtereenvolgens in de punten *P*, *Q*, *R* en *S*. Zie de figuur.



De afstand *PS* is *a* keer zo groot als de afstand *QR*.

5p **13** Bereken de waarde van *a*.

Op hetzelfde domein [0, 2π] is functie *g* gegeven door:

$$g(x) = f(x) - 2 + 5\cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

De grafiek van *g* is ook een sinusoïde. Met andere woorden: *g* heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = p + q \cdot \cos(r(x - s))$.

5p **14** Bereken mogelijke waarden van *p*, *q*, *r* en *s*. Geef deze waarden zo nodig in drie decimalen.

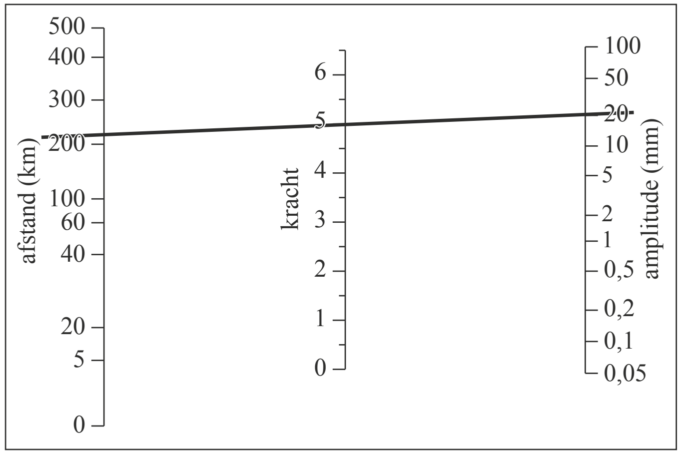
Schaal van Richter

Charles Richter heeft in 1935 een schaal opgesteld die de kracht van een aardbeving in een getal uitdrukt. Dit wordt **de schaal van Richter** genoemd.

De plaats waar een aardbeving ontstaat heet het epicentrum. Het is mogelijk om op een bepaalde afstand tot het epicentrum de kracht van een aardbeving te bepalen. Hiervoor wordt de grootte van de beweging van de aardkorst in verticale richting gemeten. Deze verticale uitwijking is de zogeheten amplitude.

De kracht van een aardbeving kan bepaald worden met behulp van een **nomogram**. Hierbij wordt de afstand van de plaats van meting tot het epicentrum als punt op de as 'afstand' in het nomogram aangegeven. De gemeten amplitude wordt als punt op de as 'amplitude' in het nomogram aangegeven. Het snijpunt van de lijn door deze twee punten met de middelste as (kracht) geeft de kracht van de aardbeving.
Zie hieronder.

nomogram



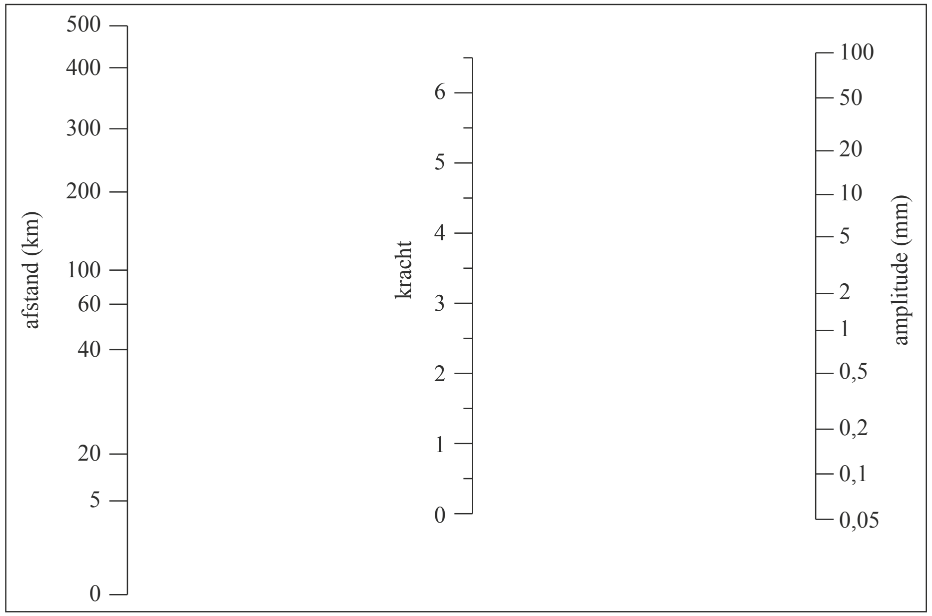
In het nomogram zie je bijvoorbeeld dat als op een afstand van ongeveer 220 km vanaf het epicentrum de amplitude 20 mm is, er een aardbeving heeft plaatsgevonden met een kracht van 5 op de schaal van Richter.

Er geldt: als de **amplitude** van de ene aardbeving tien keer zo groot is als de amplitude van een andere aardbeving, dan is de **kracht** van de zwaarste beving 1,0 groter dan de kracht van de lichtste beving.

4p **15** Laat dit zien voor twee aardbevingen waarvan op 100 km van het epicentrum de ene een amplitude van 0,1 mm heeft en de andere een amplitude van 1 mm. Maak hierbij gebruik van het nomogram op de uitwerkbijlage.

Uitwerkbijlage bij vraag 15

nomogram



Ook met behulp van een formule kan uit de afstand *D* tot het epicentrum en de amplitude *A* de kracht op de schaal van Richter berekend worden. Deze kracht wordt in één decimaal nauwkeurig gegeven.

Voor de kracht op de schaal van Richter geldt:

$K = \log(A) + 1{,}6 \cdot \log(D) - 0{,}15$ voor $D \leq 200$ (1)
$K = \log(A) + 3 \cdot \log(D) - 3{,}38$ voor $D > 200$ (2)

Hierin is *K* de kracht op de schaal van Richter, *A* de amplitude in mm en *D* de afstand tot het epicentrum in km.

De hoeveelheid schade die een aardbeving aanricht, hangt af van de amplitude. Bij een amplitude van meer dan 1000 mm is er grote kans op schade aan gebouwen. Hoe verder men van het epicentrum verwijderd is, hoe kleiner de amplitude.

Op 12 mei 2008 was er in de regio Sichuan in China een aardbeving met een kracht van 7,9 op de schaal van Richter. Het cirkelvormige gebied rond het epicentrum waar de amplitude minstens 1000 mm bedroeg, werd tot rampgebied uitgeroepen.

5p **16** Bereken met behulp van formule (2) de oppervlakte van het rampgebied in vierkante kilometers. Geef je eindantwoord in duizendtallen.

Formule (1) is te schrijven in de vorm:

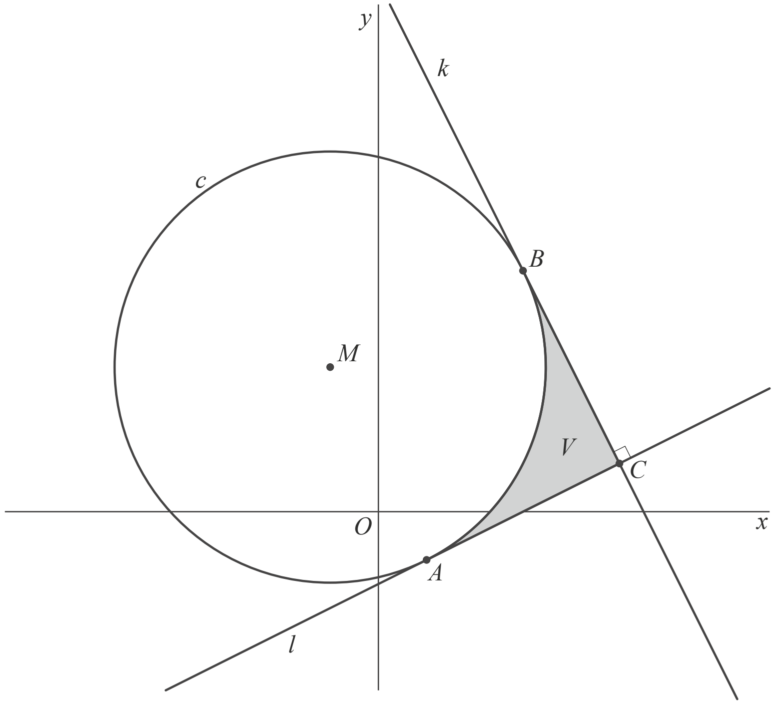
$K = \log(p \cdot A \cdot D^q)$

5p **17** Bereken *p* en *q*. Geef je eindantwoorden in één decimaal.

Loodrecht en raken

Cirkel *c* met middelpunt *M* (–1, 3) raakt lijn *l* met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ in punt *A*.

Lijn *k* staat loodrecht op *l* en raakt *c* in punt *B*. Punt *C* is het snijpunt van *k* en *l*. Lijnstukken *AC* en *BC* en cirkelboog *AB* sluiten het vlak *V* in. Zie de figuur, waarin vlak *V* grijs is weergegeven.



8p **18** Bereken algebraïsch de omtrek van *V*. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Hints bij examen 2019-I

1 Bij gelijke T en D zal alleen de term $1{,}391(Z - 35)$ voor beide zeeën verschillen.

2 Het maximum van $y = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2$ moet worden bepaald. Dit moet algebraïsch, dus bijvoorbeeld met de afgeleide functie.

3 Vul alle gegevens in de formule in om de snelheid te berekenen en bereken hiermee de afstand die het geluid aflegt in 12,45 seconden. Deze afstand is het totaal van heen- en terugweg.

4 Ga na dat punt A op de lijn l ligt. Controleer vervolgens of de afgeleide van f in punt A gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van l.

5 AM is een straal van de cirkel. Probeer te bewijzen dat de afstand van M tot de x-as gelijk is aan AM, want dan is de x-as raaklijn aan de cirkel.

6 Exact, dus de coördinaten moeten algebraïsch, zonder rekenmachine, worden berekend. Zorg dat het grondtal van beide functies gelijk wordt.

7 Gebruik de regel: $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$

8 Vul eerst de coördinaten van het midden van het net in om q te berekenen. Gebruik vervolgens de coördinaten van de zijkant van het net om p te berekenen.

9 Gebruik de sinusregel om AT of BT te berekenen. Met dit resultaat kun je de afstand van T tot de achterlijn berekenen.

10 Er zijn meerdere correcte oplossingen. Andere oplossingen kun je vinden door $f(x)$ eerst te herschrijven.

11 Bereken de x-coördinaat van A en ga na of in punt A geldt dat $f'(x) = 0$. Differentiëren met de kettingregel. Als je eerst de haakjes $f(x)$ uitwerkt, kun je de kettingregel vermijden.

12 Bereken de coördinaten van P en Q door de vergelijking $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \frac{1}{2}x - 2$ op te lossen. Dat kan algebraïsch, maar het mag ook met de rekenmachine. De lengte PQ kan exact berekend worden, maar moet worden afgerond op twee decimalen.

13 Bereken de nulpunten van $f(x)$. Dit kan algebraïsch, maar mag ook met de rekenmachine.

14 De waarde van r kan worden beredeneerd, maar p, q en s moeten met behulp van de rekenmachine worden bepaald. Tussenresultaten niet afronden.

15 Verbind afstand 100 km zowel met amplitude 0,1 als met 1 mm. Lees de bijbehorende kracht op de middelste schaalverdeling af.

16 Vul de gegeven waarden van K en A in in formule (2). Oppervlakte cirkel $= \pi r^2$.

17 Gebruik de volgende regels voor logaritmen: ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$, $p \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log(a^p)$ en $g^x = a \Leftrightarrow x = {}^g\log(a)$

18 Stel een vergelijking op van de lijn door M en A. Bereken hiermee de coördinaten van A. Ga na wat voor figuur $ACBM$ is. Omtrek cirkel $= 2\pi r$.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2019-I

Formule van Wilson

3p **1** Bij gelijke watertemperatuur T en waterdiepte D hangt het verschil in geluidssnelheid tussen beide zeeën alleen af van de term $1{,}391(Z - 35)$. [1p]
Het verschil is $1{,}391(337 - 35) - 1{,}391(12 - 35)$ [1p] $= 452{,}075$, dus afgerond 452 m/s. [1p]
andere manier

$v_{\text{Dode Zee}} = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391(337 - 35) + \frac{D}{60}$

$v_{\text{Kaspische Zee}} = 1449{,}2 + 4{,}623T - 0{,}0546T^2 + 1{,}391(12 - 35) + \frac{D}{60}$ [1p]

Bovenste formule minus onderste formule geeft:
$v_{\text{Dode Zee}} - v_{\text{Kaspische Zee}} = 1{,}391(337 - 35) - 1{,}391(12 - 35)$ [1p] $= 452{,}075$
dus afgerond is het verschil 452 m/s. [1p]

3p **2** Als Z en D als constanten worden beschouwd, wordt de T-waarde van het maximum van v bepaald door de termen $4{,}623T - 0{,}0546T^2$.
Het maximum van $y = 4{,}623T - 0{,}0546T^2$ kan worden bepaald met behulp van de afgeleide functie: $y' = 4{,}623 - 0{,}1092T$ [1p]

De afgeleide is nul als: $0{,}1092T = 4{,}623 \Leftrightarrow T = \frac{4{,}623}{0{,}1092}$ [1p] $= 42{,}335...$

dus de geluidssnelheid in zeewater is maximaal bij een temperatuur van 42,3 °C. [1p]

3p **3** $D = 20$ meter, $T = 10$ °C en $Z = 35‰$ invullen in de formule geeft:

$v = 1449{,}2 + 4{,}623 \cdot 10 - 0{,}0546 \cdot 10^2 + 1{,}391(35 - 35) + \frac{20}{60} = 1490{,}3...$ m/s [1p]

Met deze snelheid legt het geluid in 12,45 seconden $12{,}45 \times 1490{,}3... =$ 18 554,2... meter af. [1p] Deze afstand is het totaal van heen- en terugweg.
$\frac{18\,554{,}2...}{2} = 9277{,}1...$ dus het object is ongeveer 9300 meter van de onderzeeboot verwijderd. [1p]
andere manier

$v = 1449{,}2 + 4{,}623 \cdot 10 - 0{,}0546 \cdot 10^2 + 1{,}391(35 - 35) + \frac{20}{60} = 1490{,}3...$ m/s [1p]

Het geluidssignaal heeft 6,225 seconden nodig om het object te bereiken [1p], dus in die tijd legt het geluidssignaal $1490{,}3... \times 6{,}225 = 9277{,}1... \approx 9300$ meter af. [1p]

Ingeklemd

4p **4** De coördinaten van $A(4, 3)$ invullen in de vergelijking van $l: y = \frac{3}{4}x$ geeft:
$3 = \frac{3}{4} \cdot 4$ en dat klopt, dus A ligt op de lijn l. [1p]

$f(x) = -3 + 3\sqrt{x} = -3 + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$ [1p]

In punt A is de afgeleide van f gelijk aan $f'(4) = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$ [1p] en dat is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van lijn l, dus lijn l raakt de grafiek van f in A. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

5p **5** l is raaklijn aan de cirkel $\Rightarrow l \perp AM \Rightarrow rc_l \cdot rc_{AM} = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot rc_{AM} = -1 \Leftrightarrow rc_{AM} = -\frac{4}{3}$ [1p]

De lijn door A en M is van de vorm $y = -\frac{4}{3}x + b$.

De coördinaten van $A(4, 3)$ invullen geeft: $3 = -\frac{4}{3} \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{16}{3} = 8\frac{1}{3}$ [1p]

Een vergelijking van de lijn door A en M is: $y = -\frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3}$

Hierin $x = 5$ invullen: $y = -\frac{4}{3} \cdot 5 + 8\frac{1}{3} = -\frac{20}{3} + 8\frac{1}{3} = -6\frac{2}{3} + 8\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$

De coördinaten van M zijn dus $M\left(5, 1\frac{2}{3}\right)$. [1p]

De lengte van straal MA is $\sqrt{(4-5)^2 + \left(3 - 1\frac{2}{3}\right)^2}$ [1p] $= \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ $= 1\frac{2}{3}$

en dat is gelijk aan de afstand van M tot de x-as, dus de cirkel raakt de x-as. [1p]

andere manier

l is raaklijn aan de cirkel $\Rightarrow l \perp AM \Rightarrow rc_l \cdot rc_{AM} = -1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot rc_{AM} = -1 \Leftrightarrow rc_{AM} = -\frac{4}{3}$ [1p]

$x_A = 4$ en $x_M = 5$ dus punt M ligt precies eenmaal rc_{AM} lager dan punt A [1p] $\Rightarrow$

$y_M = 3 - \frac{4}{3} = 1\frac{2}{3} \Rightarrow$ de coördinaten van M zijn $M\left(5, 1\frac{2}{3}\right)$ [1p]

De lengte van straal MA is $\sqrt{(4-5)^2 + \left(3 - 1\frac{2}{3}\right)^2}$ [1p] $= \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ $= 1\frac{2}{3}$

en dat is gelijk aan de afstand van M tot de x-as, dus de cirkel raakt de x-as. [1p]

Twee exponentiële functies

4p **6** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}x+3} = 4^x \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}x+3} = (2^2)^x \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}x+3} = 2^{2x}$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = 2x$ [1p] $\Leftrightarrow$

$1\frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 2.$ [1p] Nu $x = 2$ invullen in g (of in f): $g(2) = 4^2 = 16$

De coördinaten van A zijn $(2, 16)$. [1p]

3p **7** $y = 2^{\frac{1}{2}x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 3 = {}^2\log(y)$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = {}^2\log(y) - 3$ [1p] $\Leftrightarrow x = 2 \cdot {}^2\log(y) - 6$ [1p]

Andere correcte antwoorden zijn ${}^2\log(y^2) - 6$ *en* ${}^2\log\left(\frac{y^2}{64}\right)$.

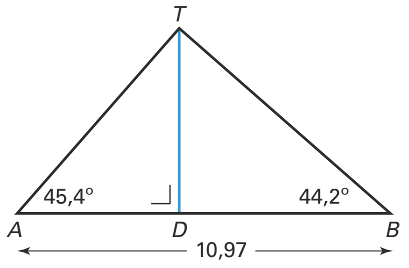
In of uit

4p **8** Het punt in het midden van het net heeft coördinaten $(0; 0{,}91)$.
Invullen in $y = px^2 + q$ geeft: $0{,}91 = p \cdot 0^2 + q \Leftrightarrow q = 0{,}91$ [1p]
Het punt aan de rechterkant van het net heeft coördinaten $(5{,}03; 1{,}07)$.
Invullen in $y = px^2 + 0{,}91$ geeft: $1{,}07 = p \cdot 5{,}03^2 + 0{,}91$ [1p] $\Leftrightarrow 0{,}16 = 25{,}3009p \Leftrightarrow$

$p = \frac{0{,}16}{25{,}3009}$ [1p] $= 0{,}0063...$

Conclusie: $p \approx 0{,}006$ en $q = 0{,}91$ [1p]

6p **9** *Rekenmachine instellen op graden.*



$\angle ATB = 180 - 45{,}4 - 44{,}2 = 90{,}4°$ [1p]

Sinusregel in ΔABT: $\frac{AB}{\sin(\angle ATB)} = \frac{AT}{\sin(\angle B)} \Leftrightarrow \frac{10{,}97}{\sin(90{,}4°)} = \frac{AT}{\sin(44{,}2°)}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$AT = \frac{10{,}97 \cdot \sin(44{,}2°)}{\sin(90{,}4°)} = 7{,}648...$ [1p]

Kies punt D op de achterlijn AB zodanig dat $TD \perp AB$.

In ΔADT: $\sin(45{,}4°) = \frac{TD}{7{,}648...} \Leftrightarrow TD = \sin(45{,}4°) \cdot 7{,}648...$ [1p] $= 5{,}446...$ meter [1p]

De afstand van RP tot de achterlijn AB is $11{,}89 - 6{,}40 = 5{,}49$ meter, dus de bal is tussen RP en de achterlijn op de grond gekomen, dus niet in rechthoek $PQDR$. [1p]

andere manier

$\tan(45{,}4°) = \frac{TD}{AD} \Rightarrow TD = AD \cdot \tan(45{,}4°)$ [1p] $\Leftrightarrow TD = 1{,}01... \cdot AD$

$\tan(44{,}2°) = \frac{TD}{10{,}97 - AD} \Rightarrow TD = (10{,}97 - AD) \cdot \tan(44{,}2°)$ [1p] $\Leftrightarrow$

$TD = 0{,}97... \cdot (10{,}97 - AD)$

Uit beide voorgaande regels volgt:
$1{,}01... \cdot AD = 0{,}97... \cdot (10{,}97 - AD)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$1{,}01... \cdot AD = 10{,}66... - 0{,}97... \cdot AD \Leftrightarrow$
$1{,}98... \cdot AD = 10{,}66... \Leftrightarrow$

$AD = \frac{10{,}66...}{1{,}98...} = 5{,}37...$ [1p]

In ΔADT: $\tan(45{,}4°) = \frac{TD}{5{,}37...} \Leftrightarrow TD = \tan(45{,}4°) \cdot 5{,}37... = 5{,}446...$ meter [1p]

De afstand van RP tot de achterlijn AB is $11{,}89 - 6{,}40 = 5{,}49$ meter, dus de bal is tussen RP en de achterlijn op de grond gekomen, dus niet in rechthoek $PQDR$. [1p]

Grafiek van een derdegraadsfunctie en een lijn

3p **10** De volgorde in onderstaande oplossingen is steeds van links naar rechts.

$x^3 \xrightarrow{\text{translatie 2 naar rechts}} (x-2)^3$ [1p] $\xrightarrow{\text{vermenigvuldigen t.o.v. de } y\text{-as met factor 2}} \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3$ [2p]

andere oplossing

Herschrijf $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}(x-4)\right)^3$. [1p] Dit geeft een andere oplossing:

$x^3 \xrightarrow{\text{vermenigvuldigen t.o.v. de } y\text{-as met factor 2}} \left(\frac{1}{2}x\right)^3$ [1p] $\xrightarrow{\text{translatie 4 naar rechts}} \left(\frac{1}{2}(x-4)\right)^3$ [1p]

nog een andere oplossing

Herschrijf $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}(x-4)\right)^3$ [1p] $= \left(\frac{1}{2}\right)^3(x-4)^3 = \frac{1}{8}(x-4)^3$. [1p]

Dit geeft nog twee andere oplossingen:

$x^3 \xrightarrow{\text{vermenigvuldigen t.o.v. de } x\text{-as met factor 1/8}} \frac{1}{8}x^3 \xrightarrow{\text{translatie 4 naar rechts}} \frac{1}{8}(x-4)^3$

en omdat in dit geval de volgorde niet uitmaakt:

$x^3 \xrightarrow{\text{translatie 4 naar rechts}} (x-4)^3 \xrightarrow{\text{vermenigvuldigen t.o.v. de } x\text{-as met factor 1/8}} \frac{1}{8}(x-4)^3$ [1p]

5p **11** $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 2 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$ [1p]

Differentiëren met de kettingregel:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$ [2p]

In punt $A(4, 0)$ geldt: $f'(4) = 1\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 2\right)^2 = 0 \Rightarrow$ de grafiek heeft een horizontale raaklijn in A. [1p]

andere manier

Bereken de coördinaten $A(4, 0)$ zoals hierboven. [2p]

$f(x)$ zonder haakjes schrijven:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) =$

$\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 = \frac{1}{8}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 6x - 8$ [1p]

$f(x)$ differentiëren: $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + 6$ [1p]

In punt $A(4, 0)$ geldt: $f'(4) = \frac{3}{8} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 6 = 6 - 12 + 6 = 0 \Rightarrow$ de grafiek heeft een horizontale raaklijn in A. [1p]

3p **12** Opgelost moet worden: $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \frac{1}{2}x - 2$

Substitueer: $u = \frac{1}{2}x - 2$

Dit geeft: $u^3 = u \Leftrightarrow u^3 - u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ of $u = 1$ of $u = -1$ [1p]

$u = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ dus dit geeft weer punt A.

$u = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$ en dit geeft punt $Q(6, 1)$.

$u = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}x - 2 = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ en dit geeft punt $P(2, -1)$. [1p]

De lengte van PQ is $\sqrt{(6-2)^2 + (1 - -1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}472...$, afgerond 4,47. [1p]

De vergelijking $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3 = \frac{1}{2}x - 2$ *mag ook met de rekenmachine worden opgelost.*

Sinusoïden

5p **13** *Rekenmachine instellen op radialen.*

De nulpunten van de grafiek moeten berekend worden.

Voer in de rekenmachine in: $y_1 = 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$

De optie *zero/nulpunt* [1p] geeft: $x_P = 0{,}52...$, $x_Q = 1{,}57...$, $x_R = 3{,}66...$ en $x_S = 4{,}71...$ [2p]

$\frac{PS}{QR} = \frac{4{,}71... - 0{,}52...}{3{,}66... - 1{,}57...}$ [1p] $= 2$ dus $a = 2$. [1p]

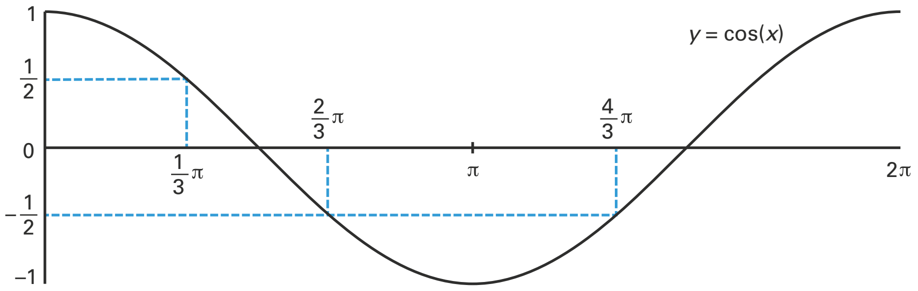
© ThiemeMeulenhoff

andere manier

Nulpunten algebraïsch berekenen.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -1 \Leftrightarrow \cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$ [1p]

De standaardfunctie $y = \cos(x)$ geeft $-\frac{1}{2}$ als uitkomst voor $x = \frac{2}{3}\pi$ en $x = \frac{4}{3}\pi$.



Hieruit volgt: $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi$ dus $x_P = \frac{1}{6}\pi$ [1p]

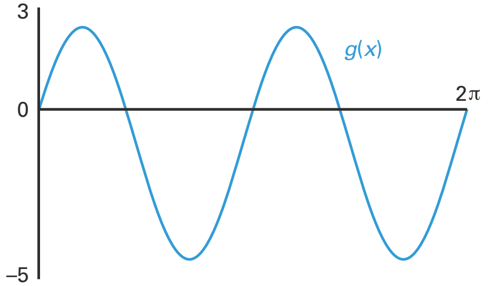
Of: $2x + \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi$ dus $x_Q = \frac{1}{2}\pi$

De periode van de grafiek van f is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ dus er zijn op $[0, 2\pi]$ nog twee andere nulpunten die precies één periode verder liggen: $x_R = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x_S = 1\frac{1}{2}\pi$. [1p]

$\frac{PS}{QR} = \frac{x_S - x_P}{x_R - x_Q} = \frac{1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi}{1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi}$ [1p] $= \frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 2$ dus $a = 2$ [1p]

5p **14** De periode van $f(x)$ is π en de periode van $y = -2 + 5\cos\left(2(x - \frac{1}{4}\pi)\right)$ is ook π, dus dan is ook de periode van $g(x)$ gelijk aan π. Hieruit volgt $r = 2$. [1p]

Voer in de rekenmachine in: $y_1 = 1 + 2\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) - 2 + 5\cos\left(2(x - \frac{1}{4}\pi)\right)$



De optie *maximum* [1p] geeft $y = 2{,}4175...$ (bij $x = 0{,}6369...$) en de optie *minimum* geeft $y = -4{,}4175...$ dus voor de evenwichtsstand p geldt $p = \frac{2{,}4175... + -4{,}4175...}{2} = -1$ [1p]

en de amplitude q is gelijk aan $q = \frac{2{,}4175... - -4{,}4175...}{2} = 3{,}4175...$, afgerond 3,418. [1p]

s bepaalt een beginpunt van de cosinusgrafiek, dus de x-coördinaat bij een maximum. Hierboven is al berekend: $s = 0{,}6369...$, afgerond 0,637 [1p]

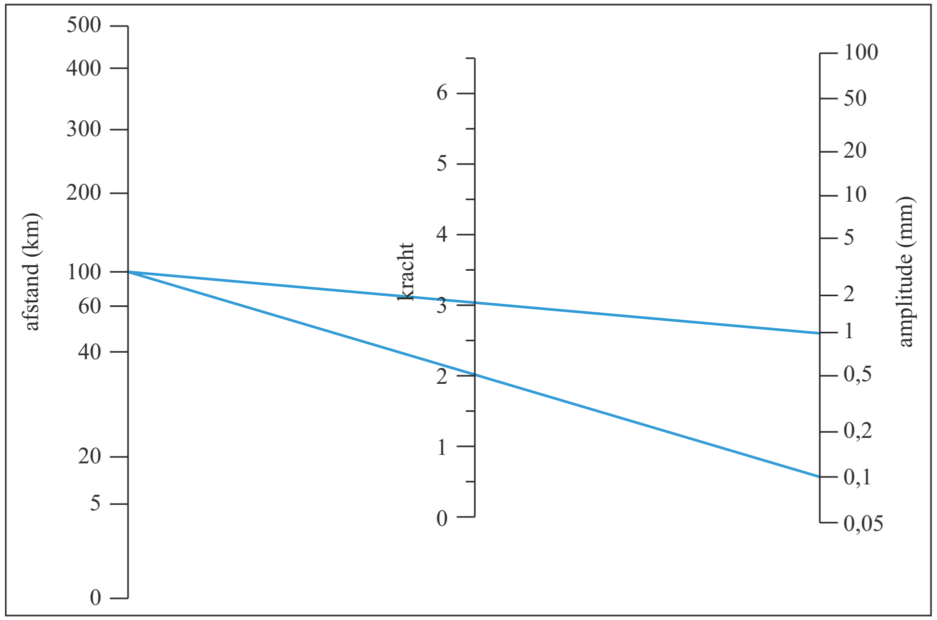
Samengevat: $p = -1$; $q = 3{,}418$; $r = 2$ en $s = 0{,}637$

© ThiemeMeulenhoff

Schaal van Richter

4p **15** Afstand 100 km verbinden met amplitude 0,1 mm geeft kracht 2,0 [2p] en afstand 100 km verbinden met amplitude 1 mm geeft kracht 3,0. [1p]

nomogram



De kracht van de zwaarste beving is inderdaad 1,0 groter dan de kracht van de lichtste beving. [1p]

5p **16** Op de rand van het cirkelvormige gebied geldt $A = 1000$ mm. De kracht van deze aardbeving is 7,9.
Deze gegevens invullen in formule (2):
$7{,}9 = \log(1000) + 3 \cdot \log(D) - 3{,}38$ [1p] $\Leftrightarrow$ $7{,}9 + 3{,}38 - 3 = 3 \cdot \log(D) \Leftrightarrow$

$\log(D) = \frac{8{,}28}{3} = 2{,}76$ [1p] $\Rightarrow$ $D = 10^{2{,}76} = 575{,}4...$ km [1p]

Dit is de straal van het cirkelvormige gebied.
De oppervlakte van het rampgebied is $\pi \cdot (575{,}4...)^2$ [1p] = 1 040 279,0..., en dat is afgerond 1 040 000 km^2. [1p]

5p **17** $K = \log(A) + 1{,}6 \cdot \log(D) - 0{,}15 \Rightarrow$
$K = \log(A) + \log(D^{1{,}6}) + \log(10^{-0{,}15})$ [2p] $\Rightarrow$
$K = \log(A \cdot D^{1{,}6} \cdot 10^{-0{,}15})$ [1p] $= \log(10^{-0{,}15} \cdot A \cdot D^{1{,}6})$ [1p]
Afronden op één decimaal: $p = 10^{-0{,}15} \approx 0{,}7$ en $q = 1{,}6$ [1p]
andere manier
De gewenste formule herleiden:
$K = \log(p \cdot A \cdot D^q) = \log(p) + \log(A) + \log(D^q)$ [1p] $= \log(A) + q \cdot \log(D) + \log(p)$ [1p]
Vergelijken van deze formule met formule (1) geeft:
$q = 1{,}6$ en $\log(p) = -0{,}15$ [1p] $\Leftrightarrow$ $q = 1{,}6$ en $p = 10^{-0{,}15}$ [1p] $\approx 0{,}7$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Loodrecht en raken

8p **18** $MA \perp l \Rightarrow rc_{MA} \cdot rc_l = -1 \Rightarrow rc_{MA} \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow rc_{MA} = -2$ [1p]
De lijn door M en A heeft een vergelijking van de vorm $y = -2x + b$.
De coördinaten van $M(-1, 3)$ invullen: $3 = -2 \cdot -1 + b \Leftrightarrow b = 1$ [1p] dus de vergelijking van de lijn door M en A is $y = -2x + 1$.
Het snijpunt A van deze lijn en l volgt uit:

$-2x + 1 = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\frac{1}{2}x = -2\frac{1}{2} \Rightarrow x_A = 1$ [1p] dus $y_A = -2 \cdot 1 + 1 = -1 \Rightarrow A(1, -1)$ [1p]

De straal van c is $MA = \sqrt{(-1-1)^2 + (3--1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$. [1p]

$MA = MB$ en alle hoeken van $ACBM$ zijn 90° dus $ACBM$ is een vierkant $\Rightarrow$ ook AC en BC zijn $\sqrt{20}$. [1p]

De lengte van boog AB is een kwart van de omtrek van de cirkel, dus $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{20}$. [1p]

De omtrek van V is $2 \cdot \sqrt{20} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{20} = 15{,}969...$ dus afgerond 15,97. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

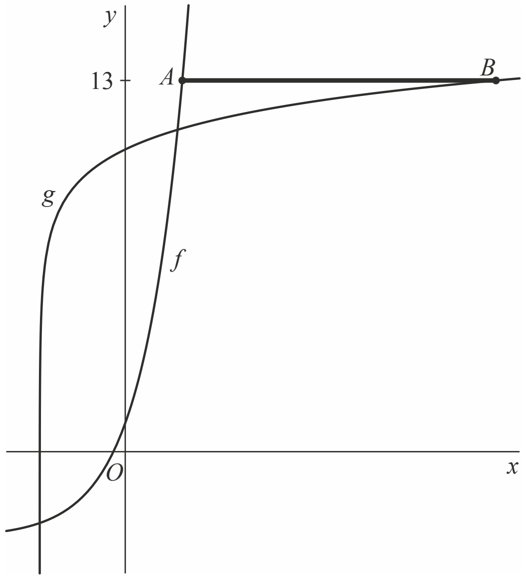
Examen 2019-II

Een logaritmische en een exponentiële functie

De functies f en g worden gegeven door:

$f(x) = 4^{x+1} - 3$ en $g(x) = 8 + {}^{2}\log\left(4\left(x + 1\frac{1}{2}\right)\right)$

Op de grafiek van f ligt een punt met y-coördinaat 13. Dat is het punt A. Op de grafiek van g ligt ook een punt met y-coördinaat 13. Dat is het punt B.
Zie de figuur, waarin het lijnstuk AB vet weergegeven is.



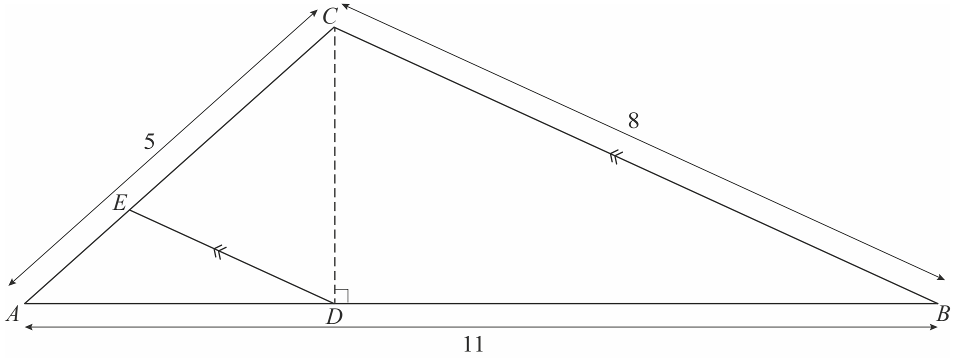
6p **1** Bereken exact de lengte van lijnstuk AB.

De grafiek van g ontstaat uit de grafiek van de standaardfunctie $y = {}^{2}\log(x)$ door een horizontale en een verticale translatie.
Door het functievoorschrift van g te herleiden tot de vorm $g(x) = {}^{2}\log(x + a) + b$ kun je op exacte wijze berekenen om welke horizontale en verticale translatie het gaat.

3p **2** Bereken op exacte wijze door welke horizontale en verticale translatie de grafiek van g ontstaat uit de grafiek van de standaardfunctie $y = {}^{2}\log(x)$.

Hoe lang is *DE*?

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 11$, $BC = 8$ en $AC = 5$.
Het punt D ligt op zijde AB, zo dat lijnstuk CD loodrecht op zijde AB staat.
Het punt E ligt op zijde AC, zo dat lijnstuk DE evenwijdig is met zijde BC.
Zie de figuur.



6p **3** Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk DE. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Viscositeit

Er wordt veel onderzoek gedaan naar de **viscositeit** van vloeistoffen.
De viscositeit van een vloeistof is een getal dat aangeeft hoe stroperig die vloeistof is: hoe groter de viscositeit, hoe stroperiger die vloeistof.

Suiker kun je in water oplossen. De concentratie suiker bepaalt de viscositeit van de vloeistof die zo ontstaat. Aan het begin van de twintigste eeuw is het volgende theoretische verband afgeleid tussen de concentratie suiker en de viscositeit:

$$V = \frac{1 + 0{,}5C}{(1 - C)^4}$$

Hierin is V de viscositeit en C de concentratie suiker.
Hierbij wordt met een concentratie van bijvoorbeeld $C = 0{,}3$ bedoeld dat het volume van de suiker 30% van het totale volume van de vloeistof is.

Tessa heeft een glas water gekregen waarin suiker is opgelost.
De concentratie suiker in het water is 0,17. Vervolgens voegt ze nog meer suiker toe.
Na deze toevoeging blijkt de viscositeit verdubbeld te zijn.

4p **4** Bereken de concentratie suiker in het water na deze toevoeging. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Ongeveer gelijktijdig met de vondst van de formule voor V stelde de scheikundige Emil Hatschek een lineaire formule op voor het verband tussen de viscositeit en de concentratie suiker:

$V_{lin} = a \cdot C + b$

Hierin is V_{lin} een benadering van V.
Voor dit lineaire verband geldt: $a = V'(0)$ en $b = V(0)$.
De waarde van $V'(0)$ kan benaderd worden door het differentiequotiënt $\frac{\Delta V}{\Delta C}$ op een heel klein interval.

3p **5** Stel met behulp van het differentiequotiënt op het interval $[0; 0{,}001]$ een formule op voor V_{lin}. Geef de getallen in je eindantwoord zo nodig in één decimaal.

Twee toppen en twee evenwijdige lijnen

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -(2x-3)^3 + 3x^2 - 6x + 4$.
Voor de afgeleide functie van f geldt: $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$.

4p **6** Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$.

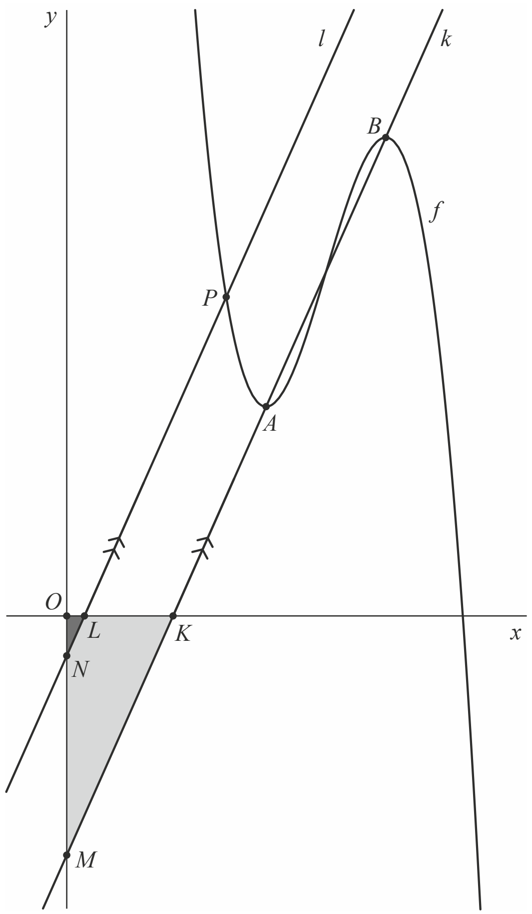
De grafiek van f heeft twee toppen. Dit zijn de punten A en B. De lijn k is de lijn door A en B.

Het punt P (1, 2) ligt op de grafiek van f.
De lijn l is evenwijdig aan lijn k en gaat door P.

Lijn k snijdt de x-as in punt K en de y-as in punt M.
Lijn l snijdt de x-as in punt L en de y-as in punt N.

Vanwege de evenwijdigheid van lijn k en lijn l is driehoek OKM gelijkvormig met driehoek OLN.

Zie de figuur.



Lijnstuk KM is z keer zo lang als lijnstuk LN.

7p **7** Bereken exact de waarde van z.

NK Tegenwindfietsen

Om tegen de wind in te fietsen, moet je flink hard trappen.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de snelheid van een fietser constant is en dat de snelheid van de tegenwind constant is.

Als je op een vlakke weg tegen de wind in fietst, moet je vermogen leveren. Je kunt dit vermogen als volgt berekenen:

$P_{vlak} = 0{,}00386 \cdot v \cdot (v + v_{wind})^2$

Hierin is P_{vlak} het vermogen in watt (W), v de snelheid van de fietser in km/uur en v_{wind} de snelheid van de tegenwind in km/uur.
Zowel v als v_{wind} zijn positief.

Elk jaar wordt – als het hard genoeg waait – het NK (Nederlands Kampioenschap) Tegenwindfietsen georganiseerd. Hierbij fietsen de deelnemers 8,5 km tegen de wind in.

In 2016 werd het NK Tegenwindfietsen gewonnen door Teun Sweere in een tijd van 22 minuten en 30 seconden bij een tegenwind met een snelheid van 80 km/uur.

Stel dat Sweere bij een toekomstige deelname aan het NK Tegenwindfietsen een tegenwind heeft met een snelheid die 5% groter is dan in 2016, maar dat hij met dezelfde snelheid wil fietsen als in 2016. Hij zal dan een groter vermogen moeten leveren dan tijdens de wedstrijd in 2016.

5p **8** Bereken hoeveel procent méér vermogen hij dan zou moeten leveren. Geef je eindantwoord als een heel getal.

Wanneer je bergop fietst, moet je ook flink wat vermogen leveren. We gaan er in de rest van de opgave vanuit dat er bij bergop fietsen geen wind is. Ook nemen we aan dat de berg overal even steil is.

Het vermogen dat een fietser moet leveren bij bergop fietsen, kun je dan als volgt berekenen:

$P_{bergop} = 0{,}0273 \cdot m \cdot h \cdot v$

Hierin is P_{bergop} het vermogen in watt (W), m de totale massa van de fietser en zijn fiets in kg, h het hellingspercentage van de weg en v de snelheid van de fietser in km/uur.

In Zuid-Limburg ligt de Keutenberg. De weg naar de top is 1,2 km lang en heeft een hellingspercentage van 5,9%. Ibrahim is een amateurwielrenner. Hij legt de weg naar de top van de Keutenberg af met een vermogen van 210 W. De massa van Ibrahim en zijn fiets is in totaal 72 kg.

4p **9** Bereken hoe lang Ibrahim over de beklimming doet. Geef je eindantwoord in gehele minuten.

De Alpe d'Huez is een berg in Frankrijk die zeer bekend is van de Tour de France. De weg naar de top heeft een lengte van 13,4 km en een hellingspercentage van 8,4%.

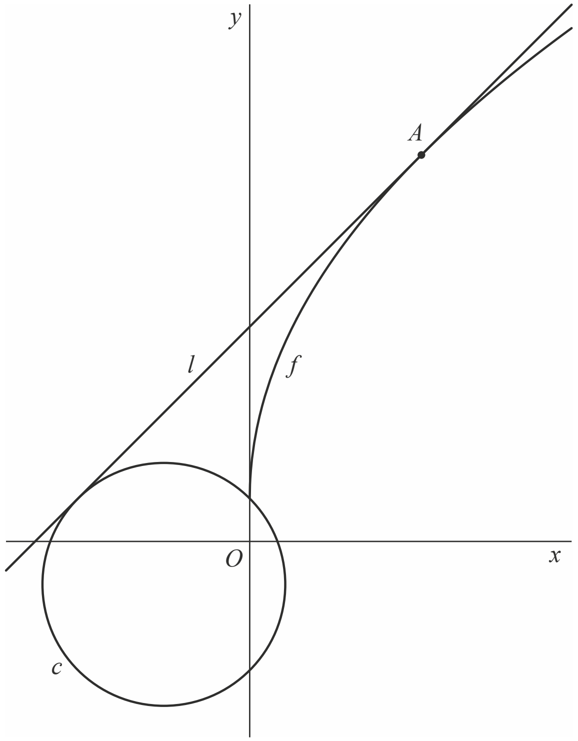
Tom wil de Alpe d'Huez met zijn racefiets beklimmen. Hij heeft zich als doel gesteld om dat met een snelheid van 19 km/uur te gaan doen.
Als onderdeel van zijn training neemt hij deel aan het NK Tegenwindfietsen, waarbij de wind een snelheid heeft van 70 km/uur. Hij wil daarbij evenveel vermogen leveren als hij bij de rit op de Alpe d'Huez moet leveren om zijn doel te halen. Tom en zijn racefiets hebben samen een massa van 78 kg.

3p **10** Bereken de snelheid waarmee Tom moet fietsen bij het NK Tegenwindfietsen in km/uur. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Een cirkel en functies met een wortel

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 1 + 4\sqrt{x}$.
De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $A(4, 9)$.
Verder is gegeven de cirkel c met vergelijking $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$.
Zie figuur 1.

figuur 1

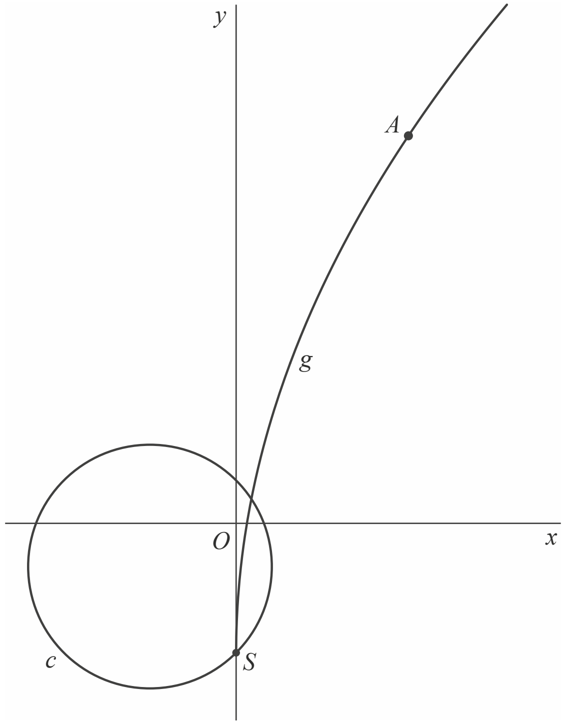


Lijn l en cirkel c raken elkaar.

6p **11** Bewijs dit.

Cirkel c heeft twee snijpunten met de y-as. Een van die twee punten ligt onder de x-as. Dit is het punt S. Zie figuur 2.
De functie g heeft een functievoorschrift van de vorm $g(x) = p\sqrt{x} + q$.
De grafiek van g heeft S als randpunt en gaat bovendien door A. In figuur 2 is ook de grafiek van g weergegeven.

figuur 2

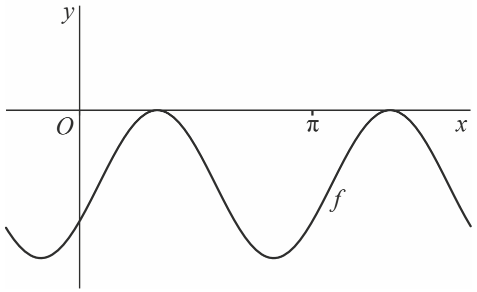


5p **12** Bereken exact de waarden van p en q.

Sinusoïde en lijn

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi)$. De grafiek van f is in figuur 1 weergegeven.

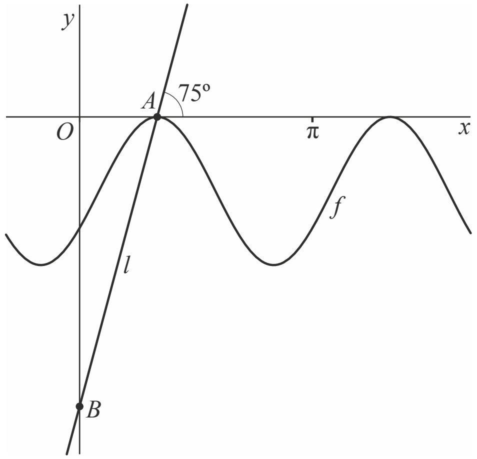
figuur 1



Er zijn vier waarden van x in het interval $0 \leq x \leq 2\pi$ waarvoor geldt $f(x) = -\frac{1}{2}$.
6p **13** Bereken exact deze vier waarden van x.

De grafiek van f raakt de x-as in oneindig veel punten. Van deze raakpunten is het punt A het punt met de kleinste positieve x-coördinaat. Door A gaat een stijgende lijn l die een hoek van 75° met de x-as maakt. Punt B is het snijpunt van lijn l met de y-as. Zie figuur 2.

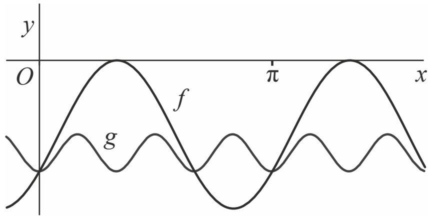
figuur 2



5p **14** Bereken de afstand tussen A en B. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

We bekijken nu de functie g. Deze heeft de volgende eigenschappen:
– De grafiek van g is een sinusoïde.
– De periode van de grafiek van g is drie keer zo klein is als de periode van de grafiek van f.
– De amplitude van de grafiek van g is vier keer zo klein als de amplitude van de grafiek van f.
– Een laagste punt van de grafiek van g valt samen met het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. Zie figuur 3.

figuur 3



Functie g heeft een functievoorschrift van de volgende vorm:

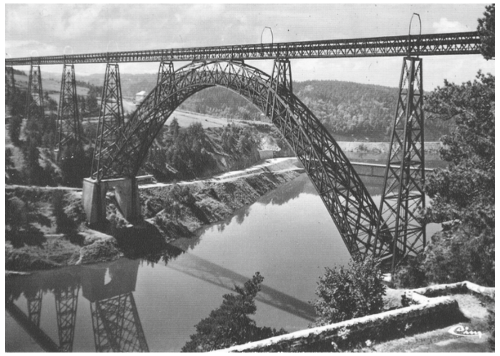
$g(x) = d + a \cdot \cos(bx)$

Hierin zijn a, b en d getallen.

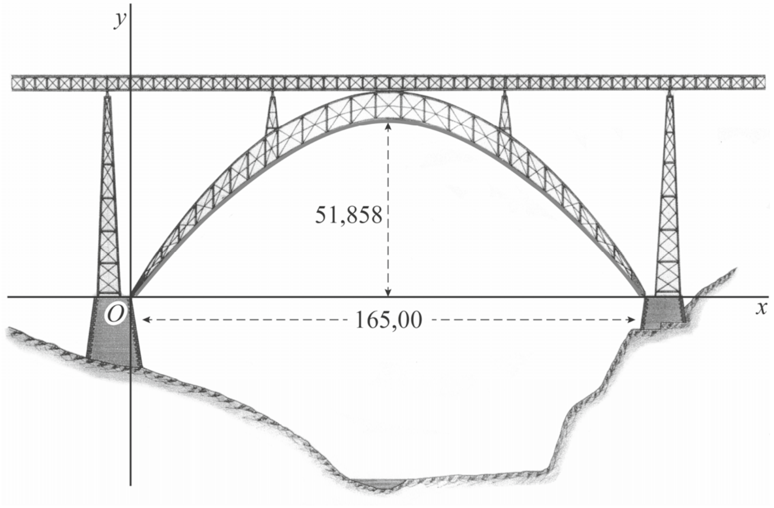
5p **15** Bereken exact voor elk van deze drie getallen een mogelijke waarde.

Viaduc de Garabit

Het Viaduc de Garabit is een spoorbrug die tussen 1880 en 1884 over de rivier de Truyère in Frankrijk is gebouwd. Zie de foto.



De onderste boog is bij benadering een deel van een parabool.
We plaatsen de parabool in een assenstelsel, zodanig dat het beginpunt van de boog zich in de oorsprong bevindt. Zie de figuur.
Verder is de afstand tussen beginpunt en eindpunt van de boog 165,00 m en bevindt de top van de onderste boog zich 51,858 m boven de x-as.



De parabool is te beschrijven met een formule van de vorm $y = ax^2 + bx$.

5p **16** Bereken algebraïsch de waarden van a en b. Geef je eindantwoord in vier decimalen.

Hints bij examen 2019-II

1 Bereken algebraïsch de oplossingen van $f(x) = 13$ en $g(x) = 13$.

2 Gebruik ${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$ om $g(x)$ in de gewenste vorm te schrijven.

3 Gebruik de cosinusregel in ΔABC om $\angle A$ te berekenen. Als je eerst $\angle B$ of $\angle C$ berekent, wordt de oplossing ingewikkelder. Gebruik ook gelijkvormigheid van driehoeken.
Er is een andere oplossing zonder sinus of cosinus: stel $AD = x$ en ga verder met de stelling van Pythagoras.

4 Vul de gegeven waarde van C in in de formule en bereken V. Verdubbel V en bereken de hierbij behorende waarde van C (mag met de rekenmachine).

5 Het differentiequotiënt van $f(x)$ op een interval $[a, b]$ is gelijk aan $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

6 Differentieer de eerste term met behulp van de kettingregel. Je kunt de kettingregel vermijden door de formule eerst zonder haakjes te schrijven, maar dat is wel meer werk.

7 Bereken eerst de coördinaten van de toppen A en B. Gebruik deze coördinaten om de richtingscoëfficiënt van de lijnen k en l te berekenen. Gebruik deze richtingscoëfficiënt om vergelijkingen van k en l op te stellen.

8 Om het vermogen in 2016 te berekenen heb je de gemiddelde snelheid nodig in km/uur. Deze gemiddelde snelheid gebruik je ook voor de toekomstige deelname, maar dan moet je wel de nieuwe snelheid van de tegenwind berekenen.

9 Als je alle gegevens in de formule invult, kun je de fietssnelheid v berekenen.

10 Bereken het vermogen dat Tom moet leveren op de Alpe d'Huez. Vul dit vermogen en de snelheid van de tegenwind in in de formule voor P_{vlak} om v te berekenen.

11 Stel een vergelijking op voor raaklijn l. Toon aan dat lijn l en cirkel c slechts één punt gemeenschappelijk hebben.

12 Bereken de coördinaten van punt S. Vul vervolgens de coördinaten van zowel S als A in in de formule van g.

13 Gebruik de regel: $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a = b + k \cdot 2\pi$ of $a = \pi - b + k \cdot 2\pi$

14 Bereken algebraïsch of met de rekenmachine de x-coördinaat van A. Je kunt nu óf een vergelijking van lijn l opstellen óf een berekening maken met 75° in ΔOAB. Let op de juiste instelling van graden of radialen.

15 Periode van $g = \frac{2\pi}{b}$. Er is in de formule van g geen horizontale verschuiving aangegeven. Omdat de grafiek van g vanaf de y-as start vanuit een laagste punt, zal a negatief moeten zijn.

16 Er zijn verschillende mogelijkheden.
Omdat de top bekend is, kun je de topformule $y = p(x - q)^2 + r$ gebruiken en van daaruit naar de gewenste vorm werken.
Je kunt ook in de gegeven formule de coördinaten van geschikte punten invullen om dan via substitutie of door het oplossen van een stelsel van lineaire vergelijkingen verder te komen.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2019-II

Een logaritmische en een exponentiële functie

6p **1** Eerst de x-coördinaat van punt A berekenen:
$f(x) = 13 \Leftrightarrow 4^{x+1} - 3 = 13 \Leftrightarrow 4^{x+1} = 16$ [1p] $\Leftrightarrow 4^{x+1} = 4^2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x_A = 1$ [1p]
Vervolgens de x-coördinaat van punt B berekenen:
$g(x) = 13 \Leftrightarrow 8 + {}^2\log\left(4\left(x + 1\frac{1}{2}\right)\right) = 13 \Leftrightarrow {}^2\log\left(4\left(x + 1\frac{1}{2}\right)\right) = 5$ [1p] $\Leftrightarrow$
$4\left(x + 1\frac{1}{2}\right) = 2^5 \Leftrightarrow 4x + 6 = 32$ [1p] $\Leftrightarrow 4x = 26 \Rightarrow x_B = 6\frac{1}{2}$ [1p]
De exacte lengte van AB is $6\frac{1}{2} - 1 = 5\frac{1}{2}$. [1p]

3p **2** $g(x) = 8 + {}^2\log\left(4\left(x + 1\frac{1}{2}\right)\right) = 8 + {}^2\log(4) + {}^2\log\left(x + 1\frac{1}{2}\right)$ [1p] $= 8 + 2 + {}^2\log\left(x + 1\frac{1}{2}\right)$
dus $g(x) = {}^2\log\left(x + 1\frac{1}{2}\right) + 10$ [1p]
De horizontale translatie is $1\frac{1}{2}$ naar links en de verticale translatie is 10 omhoog. [1p]

Hoe lang is *DE*?

6p **3** *Rekenmachine instellen op graden.*
Van ΔABC zijn alle zijden bekend, dus de cosinusregel kan worden gebruikt:
$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\angle A) \Leftrightarrow$
$8^2 = 5^2 + 11^2 - 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \cos(\angle A)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$64 = 25 + 121 - 110 \cdot \cos(\angle A) \Leftrightarrow$
$-82 = -110 \cdot \cos(\angle A) \Leftrightarrow$
$\cos(\angle A) = \frac{-82}{-110} = \frac{41}{55} = 0{,}745... \Rightarrow \angle A = 41{,}8...^\circ$ [1p]
In de rechthoekige driehoek ADC geldt:
$\cos(\angle A) = \frac{AD}{5}$ [1p] $\Rightarrow AD = 5 \cdot \cos(\angle A) = 5 \cdot \frac{41}{55} = \frac{41}{11} = 3{,}727...$ [1p]
Omdat DE en BC evenwijdig zijn, zijn de driehoeken ADE en ABC gelijkvormig. [1p]
Hieruit volgt de volgende verhoudingstabel:

AD	AB
DE	BC

$\Rightarrow$

$\frac{41}{11}$	11
DE	8

Kruislings vermenigvuldigen geeft: $DE = \frac{8 \cdot \frac{41}{11}}{11} = 2{,}710...$
In twee decimalen nauwkeurig: $DE \approx 2{,}71$ [1p]
andere manier zonder een hoek te berekenen
Stel $AD = x$ dan volgt hieruit $BD = 11 - x$.
Pythagoras in ΔADC geeft: $CD^2 + x^2 = 5^2 \Leftrightarrow CD^2 = 25 - x^2$ [1p] $\Rightarrow CD = \sqrt{25 - x^2}$
Pythagoras in ΔBDC geeft: $BD^2 + CD^2 = 8^2 \Leftrightarrow CD^2 = 64 - BD^2 = 64 - (11 - x)^2$ [1p] $\Leftrightarrow$
$CD = \sqrt{64 - (11 - x)^2}$
Uit beide voorgaande regels volgt: $25 - x^2 = 64 - (11 - x)^2 \Leftrightarrow$
$25 - x^2 = 64 - (121 - 22x + x^2)$ [1p] $\Leftrightarrow 25 - x^2 = 64 - 121 + 22x - x^2 \Leftrightarrow$
$-22x = 64 - 121 - 25 = -82 \Leftrightarrow x = \frac{-82}{-22} = \frac{41}{11} \Leftrightarrow AD = \frac{41}{11}$ [1p]
Omdat DE en BC evenwijdig zijn, zijn de driehoeken ADE en ABC gelijkvormig. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Hieruit volgt de volgende verhoudingstabel:

AD	AB
DE	BC

$\Rightarrow$

$\frac{41}{11}$	11
DE	8

Kruislings vermenigvuldigen geeft: $DE = \dfrac{8 \cdot \frac{41}{11}}{11} = 2{,}710...$

In twee decimalen nauwkeurig: $DE \approx 2{,}71$ [1p]

Viscositeit

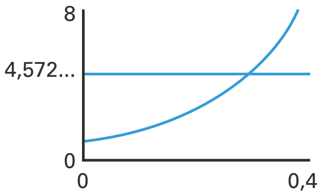
4p **4** Voor het glas water van Tessa geldt $C = 0{,}17$.

De viscositeit is dan $V = \dfrac{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}17}{(1 - 0{,}17)^4} = 2{,}286....$ [1p]

Nadat meer suiker is toegevoegd, is de viscositeit verdubbeld, dus dan geldt:

$2 \cdot 2{,}286... = \dfrac{1 + 0{,}5C}{(1 - C)^4}$ [1p] $\Leftrightarrow$ $4{,}572... = \dfrac{1 + 0{,}5C}{(1 - C)^4}$

Voer nu in de rekenmachine in: $y_1 = 4{,}572...$ en $y_2 = \dfrac{1 + 0{,}5x}{(1 - x)^4}$



De optie *intersect/snijpunt* [1p] geeft $x = 0{,}292...$ dus $C \approx 0{,}29$. [1p]

Merk op dat C niet groter dan 1 kan zijn, want als C = 1 bestaat 100% van het volume uit suiker.

3p **5** Op het interval [0; 0,001] geldt: $\dfrac{\Delta V}{\Delta C} = \dfrac{V(0{,}001) - V(0)}{0{,}001}$ [1p] $= \dfrac{1{,}00451... - 1}{0{,}001} = 4{,}51...$ [1p] $\Rightarrow$

$V'(0) = 4{,}51... \approx 4{,}5$ en $V(0) = 1$ dus de formule wordt: $V_{lin} = 4{,}5C + 1$ [1p]

Twee toppen en twee evenwijdige lijnen

4p **6** $f(x) = -(2x - 3)^3 + 3x^2 - 6x + 4$ differentiëren met de kettingregel:

$f'(x) = -3 \cdot (2x - 3)^2 \cdot 2 + 6x - 6$ [2p] $= -6(4x^2 - 12x + 9) + 6x - 6$ [1p] $=$

$-24x^2 + 72x - 54 + 6x - 6 = -24x^2 + 78x - 60$ [1p]

andere manier (zonder kettingregel)

Eerst $(2x - 3)^3$ zonder haakjes schrijven:

$(2x - 3)^3 = (2x - 3) \cdot (2x - 3) \cdot (2x - 3) = (2x - 3) \cdot (4x^2 - 12x + 9)$ [1p] $=$

$8x^3 - 24x^2 + 18x - 12x^2 + 36x - 27$ [1p] $= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Dit resultaat invullen in $f(x)$ geeft:

$f(x) = -(2x - 3)^3 + 3x^2 - 6x + 4 =$

$-8x^3 + 36x^2 - 54x + 27 + 3x^2 - 6x + 4 =$

$-8x^3 + 39x^2 - 60x + 31$ [1p]

Differentiëren geeft: $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

7p **7** In beide toppen geldt: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -24x^2 + 78x - 60 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 10 = 0$

abc-formule: $x = \dfrac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10}}{2 \cdot 4}$ [1p] $= \dfrac{13 \pm \sqrt{9}}{8} = \dfrac{13 \pm 3}{8} \Leftrightarrow x = 2$ of $x = \dfrac{5}{4}$ [1p]

$f(2) = -(2 \cdot 2 - 3)^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = -1 + 12 - 12 + 4 = 3 \Rightarrow$ top $B(2, 3)$

$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\left(2 \cdot \frac{5}{4} - 3\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{4} + 4 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{25}{16} - \frac{30}{4} + 4 =$

$\frac{1}{8} + \frac{75}{16} - \frac{15}{2} + 4 = \frac{2}{16} + \frac{75}{16} - \frac{120}{16} + \frac{64}{16} = \frac{21}{16} \Rightarrow$ top $A\left(\frac{5}{4}, \frac{21}{16}\right)$ [1p]

$rc_k = rc_l = \dfrac{3 - \frac{21}{16}}{2 - \frac{5}{4}} = \dfrac{\frac{48}{16} - \frac{21}{16}}{\frac{8}{4} - \frac{5}{4}} = \dfrac{\frac{27}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{27}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{4}$ [1p]

k heeft de vorm $y = \frac{9}{4}x + b$ [1p] en gaat door $B(2, 3) \Rightarrow 3 = \frac{9}{4} \cdot 2 + b \Leftrightarrow$

$b = 3 - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$

dus $k: y = \frac{9}{4}x - \frac{3}{2}$ en hieruit volgen de coördinaten van $M\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Verder gaat $l: y = \frac{9}{4}x + b$ door $P(1, 2) \Rightarrow 2 = \frac{9}{4} \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4} \Rightarrow N\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ [1p]

De vergrotingsfactor $z = \dfrac{KM}{LN} = \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{1} = 6$ [1p]

NK Tegenwindfietsen

5p **8** Over de 8,5 km deed Sweere 22 minuten en 30 seconden. Dat zijn 1350 seconden. [1p]

Er zitten 3600 seconden in een uur, dus Sweeres gemiddelde snelheid was

$\frac{8{,}5}{1350} \cdot 3600 = 26{,}66...$ km/uur. [1p]

In 2016, bij een tegenwind met een snelheid van 80 km/uur, leverde hij

$0{,}00386 \cdot 26{,}66... \cdot (26{,}66... + 80)^2 = 922{,}2...$ watt vermogen. [1p]

Bij een toekomstige deelname wil hij dat zijn snelheid opnieuw 26,66... km/uur is.

De snelheid van de tegenwind is dan 5% groter, dus de tegenwindsnelheid is dan

$80 \cdot 1{,}05 = 84$ km/uur.

Voor deze prestatie zal hij een vermogen moeten leveren van

$0{,}00386 \cdot 26{,}66... \cdot (26{,}66... + 84)^2 = 995{,}4...$ watt. [1p]

De procentuele toename van het noodzakelijke vermogen is dan

$\dfrac{995{,}4... - 922{,}2...}{922{,}2...} \cdot 100 = 7{,}94...\%$. Afgerond 8%. [1p]

4p **9** De gegevens zijn: $P_{bergop} = 210$ watt, $m = 72$ kg en $h = 5{,}9\%$

Alle gegevens invullen in de formule geeft:

$210 = 0{,}0273 \cdot 72 \cdot 5{,}9 \cdot v$ [1p] $\Leftrightarrow v = \dfrac{210}{0{,}0273 \cdot 72 \cdot 5{,}9} = 18{,}1...$ km/uur. [1p]

De weg naar de top is 1,2 km lang, dus hij doet er $\dfrac{1{,}2}{18{,}1...} = 0{,}0662...$ uur [1p] over

en dat zijn $0{,}0662... \cdot 60 = 3{,}97...$ minuten.

Afgerond doet hij er 4 minuten over. [1p]

3p **10** Voor Toms beklimming van de Alpe d'Huez geldt $m = 78$ kg, $h = 8{,}4\%$ en

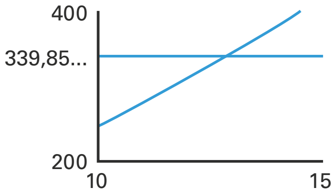
$v = 19$ km/uur. Zijn vermogen is dan $P_{bergop} = 0{,}0273 \cdot 78 \cdot 8{,}4 \cdot 19 = 339{,}85...$ watt.

Tom wil ditzelfde vermogen ook leveren bij het NK Tegenwindfietsen bij een tegenwind met een snelheid van 70 km/uur.

Deze gegevens invullen in de formule voor P_{vlak} geeft: $339{,}85... = 0{,}00386 \cdot v \cdot (v + 70)^2$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Voer nu in de rekenmachine in: $y_1 = 0{,}00386 \cdot x \cdot (x+70)^2$ en $y_2 = 339{,}85\ldots$



De optie *intersect/snijpunt* [1p] geeft $x = 12{,}83\ldots$ dus moet Tom bij het NK-Tegenwindfietsen fietsen met een snelheid van (afgerond) 12,8 km/uur. [1p]

Een cirkel en functies met een wortel

6p **11** $f(x) = 1 + 4\sqrt{x} = 1 + 4x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ [1p]

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l in het punt $A(4, 9)$ is $f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. [1p]

$y = ax + b \Rightarrow 9 = 1 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 5$ dus l : $y = x + 5$ is een vergelijking van de raaklijn. [1p]

Het snijpunt van lijn l en cirkel c berekenen door substitutie van $y = x + 5$ in c:

$(x+2)^2 + (x+5+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (x+6)^2 = 8$ [1p] $\Leftrightarrow$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 12x + 36 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x + 40 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 16x + 32 = 0$ [1p] $\Leftrightarrow$

$x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -4$

l en c hebben slechts één gemeenschappelijk punt, dus lijn l en cirkel c raken elkaar. [1p]

deels andere manier

$f(x) = 1 + 4\sqrt{x} = 1 + 4x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ [1p]

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn l in het punt $A(4, 9)$ is $f'(4) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$. [1p]

$y = ax + b \Rightarrow 9 = 1 \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 5$ dus l : $y = x + 5$ is een vergelijking van de raaklijn. [1p]

$M(-2, -1)$ is het middelpunt van de cirkel.

De lijn door $M(-2, -1)$ die loodrecht staat op lijn l heeft richtingscoëfficiënt -1.

$y = ax + b \Rightarrow -1 = -1 \cdot -2 + b \Leftrightarrow b = -3$ dus deze lijn heeft als vergelijking $y = -x - 3$. [1p]

Het snijpunt van de loodlijn door M en de lijn l volgt uit:

$x + 5 = -x - 3 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$

$x = -4$ invullen in l geeft $y = -4 + 5 = 1$ dus het snijpunt van beide lijnen is $(-4, 1)$. [1p]

$(-4, 1)$ invullen in c geeft $(-4+2)^2 + (1+1)^2 = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$ en dat klopt, dus het snijpunt $(-4, 1)$ ligt op de cirkel.

Hieruit volgt dat lijn l en cirkel c elkaar raken. [1p]

5p **12** Voor de snijpunten van de cirkel met de y-as geldt $x = 0$ dus:

$(0+2)^2 + (y+1)^2 = 8$ [1p] $\Leftrightarrow 4 + (y+1)^2 = 8 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow y + 1 = 2$ of $y + 1 = -2$ [1p] $\Leftrightarrow y = 1$ of $y = -3$ dus de coördinaten van S zijn $(0, -3)$.

De grafiek van $g(x) = p\sqrt{x} + q$ gaat door $(0, -3) \Rightarrow g(0) = p\sqrt{0} + q = -3 \Leftrightarrow q = -3$ [1p]

De grafiek van $g(x) = p\sqrt{x} - 3$ gaat door $(4, 9) \Rightarrow g(4) = p\sqrt{4} - 3 = 9$ [1p] $\Leftrightarrow$

$2p = 12 \Leftrightarrow p = 6$ [1p]

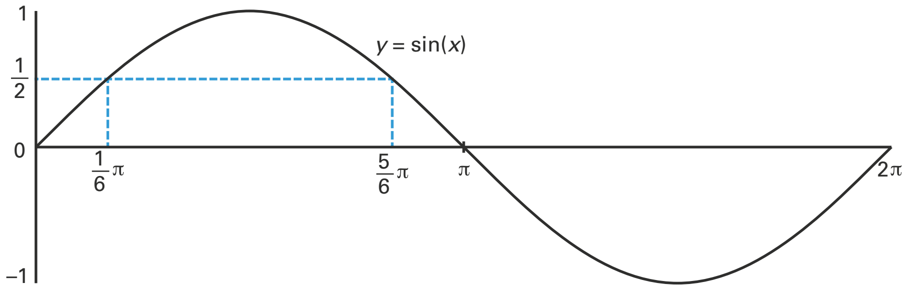
Conclusie: $p = 6$ en $q = -3$

Sinusoïde en lijn

6p **13** *Rekenmachine instellen op radialen.*

$f(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ [1p]

Voor $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft de standaardfunctie $y = \sin(x)$ als uitkomst $\frac{1}{2}$. [1p]



Hieruit volgt: $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi$ [1p]

Of: $2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \Leftrightarrow 2x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi$ [1p]

De periode van de grafiek van f is $\frac{2\pi}{2} = \pi$ dus er zijn op $[0, 2\pi]$ nog twee andere oplossingen die precies één periode verder liggen [1p]: $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$ [1p]

De vier oplossingen in het interval $0 \le x \le 2\pi$ zijn:

$x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{1}{2}\pi$

5p **14** A ligt op de x-as dus geldt: $y_A = f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \Rightarrow 2x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi$ [1p] $\Leftrightarrow 2x = \frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow x_A = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}047\ldots$ [1p]

De x-coördinaat van A mag ook met de optie zero/nulpunt op de rekenmachine berekend worden. Dat geeft $x_A = 1{,}047\ldots$

Rekenmachine nu instellen op graden.

De richtingscoëfficiënt van lijn l is $\tan(75°) = 3{,}732\ldots$ [1p] $\Rightarrow$

$y = ax + b \Rightarrow 0 = 3{,}732\ldots \cdot 1{,}047\ldots + b \Leftrightarrow b = -3{,}908\ldots$ dus punt B is $(0; -3{,}908\ldots)$. [1p]

De afstand tussen $A(1{,}047\ldots; 0)$ en $B(0; -3{,}908\ldots)$ berekenen met Pythagoras:

$AB = \sqrt{(1{,}047\ldots)^2 + (3{,}908\ldots)^2} = 4{,}046\ldots$ dus afgerond $AB = 4{,}05$ [1p]

andere manier

Bereken $x_A = 1{,}047\ldots$ op dezelfde wijze als hierboven. [2p]

Rekenmachine nu instellen op graden.

In ΔOAB geldt $\angle OAB = 75°$ (overstaande hoeken) [1p] $\Rightarrow \cos(75°) = \frac{OA}{AB}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$AB = \frac{OA}{\cos(75°)} = \frac{1{,}047\ldots}{\cos(75°)} = 4{,}046\ldots$ dus afgerond $AB = 4{,}05$ [1p]

5p **15** *Rekenmachine instellen op radialen.*

De periode van f is $\frac{2\pi}{2} = \pi$, dus de periode van g is $\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow b = 6$ [1p]

De amplitude van f is 1, dus de amplitude van g is $\frac{1}{4}$. [1p]

De grafiek van f snijdt de y-as voor $x = 0$:

$f(0) = -1 + \sin\left(2 \cdot 0 - \frac{1}{6}\pi\right) = -1 + \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = -1 - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2} \Rightarrow$

Het snijpunt van de grafiek van f met de y-as is $\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$ en dat is ook een laagste punt van de grafiek van g. [1p]

De amplitude van g is $\frac{1}{4}$ dus voor de evenwichtsstand geldt $d = -1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -1\frac{1}{4}$. [1p]

Vanuit het snijpunt $\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$ op de y-as gaat de grafiek van g stijgen, dus $a = -\frac{1}{4}$. [1p]

Conclusie: $a = -\frac{1}{4}$, $b = 6$ en $d = -1\frac{1}{4}$

Viaduc de Garabit

5p **16** Het punt (165, 0) ligt op de parabool. Deze coördinaten invullen in de formule geeft:
$0 = a \cdot 165^2 + b \cdot 165$ [1p] $\Leftrightarrow 165b = -165^2 \cdot a \Leftrightarrow b = -165a$ [1p]
Door substitutie van b wordt de formule: $y = ax^2 - 165a \cdot x$
In deze formule de coördinaten van de top (82,5; 51,858) [1p] invullen:
$51{,}858 = a \cdot 82{,}5^2 - 165a \cdot 82{,}5 \Leftrightarrow 51{,}858 = 6806{,}25a - 13\,612{,}5a \Leftrightarrow$

$51{,}858 = -6806{,}25a$ [1p] $\Leftrightarrow a = \frac{51{,}858}{-6806{,}25} = -0{,}00761...$

$b = -165a$ dus $b = -165 \cdot -0{,}00761... = 1{,}25716...$
Afgerond: $a = -0{,}0076$ en $b = 1{,}2572$ [1p]

andere manier (topformule gebruiken)
De coördinaten van de top zijn (82,5; 51,858). [1p]
De formule van de parabool moet dan van de vorm $y = a(x - 82{,}5)^2 + 51{,}858$ zijn. [1p]
(0, 0) ligt op de parabool, dus $0 = a(0 - 82{,}5)^2 + 51{,}858$ [1p] $\Leftrightarrow 82{,}5^2 \cdot a = -51{,}858 \Leftrightarrow$

$a = \frac{-51{,}858}{82{,}5^2} = -0{,}00761...$ [1p] dus de formule wordt $y = -0{,}00761... \cdot (x - 82{,}5)^2 + 51{,}858$
Deze formule zonder haakjes schrijven:
$y = -0{,}00761... \cdot (x^2 - 165x + 6806{,}25) + 51{,}858 \Leftrightarrow$
$y = -0{,}00761... \cdot x^2 + 1{,}25716... \cdot x - 51{,}858000... + 51{,}858 \Leftrightarrow$
$y = -0{,}00761... \cdot x^2 + 1{,}25716... \cdot x - 0{,}000000...$
Afgerond: $a = -0{,}0076$ en $b = 1{,}2572$ [1p]
nog een andere manier (stelsel van lineaire vergelijkingen)
Vul (165, 0) in: $0 = a \cdot 165^2 + b \cdot 165 \Leftrightarrow 0 = 27\,225a + 165b$
Vul (82,5; 51,858) [1p] in: $51{,}858 = a \cdot 82{,}5^2 + b \cdot 82{,}5 \Leftrightarrow 51{,}858 = 6806{,}25a + 82{,}5b$ [1p]
Nu moet het stelsel van lineaire vergelijkingen worden opgelost:

$$\begin{cases} 0 = 27\,225a + 165b \\ 51{,}858 = 6806{,}25a + 82{,}5b \end{cases} \text{[1p]} \left|\begin{matrix} \times 1 \\ \times 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 = 27\,225a + 165b \\ 103{,}716 = 13\,612{,}5a + 165b \end{matrix}$$

Bovenste regel minus onderste regel geeft: $-103{,}716 = 13\,612{,}5a$ [1p] $\Leftrightarrow$

$a = \frac{-103{,}716}{13\,612{,}5} = -0{,}00761...$
Deze waarde van a invullen in de bovenste regel van het stelsel:

$0 = 27\,225 \times -0{,}00761... + 165 \cdot b \Leftrightarrow b = \frac{27\,225 \times 0{,}00761...}{165} = 1{,}2571...$

Afgerond: $a = -0{,}0076$ en $b = 1{,}2572$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Oefenen met het examen van 2021-I.
De antwoorden en uitwerkingen vind je op mijn.examenbundel.nl.

Deel 2b Examen zonder uitwerkingen

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift op mijn.examenbundel.nl.

Examen 2021-I

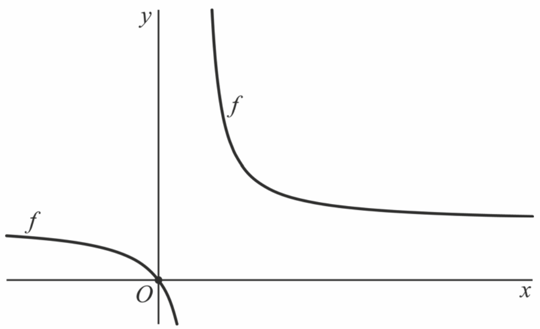
Gebroken functie en wortelfunctie

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4x - 3}$$

De grafiek van f gaat door de oorsprong O. Zie figuur 1.

figuur 1



4p **1** Bereken exact de helling van de grafiek van f in O.

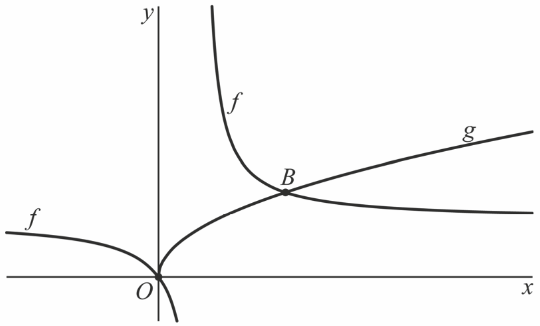
Het functievoorschrift van f is ook anders te schrijven, namelijk:

$$f(x) = \frac{4x}{4x - 3}$$

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt{x}$.

De grafieken van f en g hebben twee punten gemeenschappelijk, O en B. Zie figuur 2.

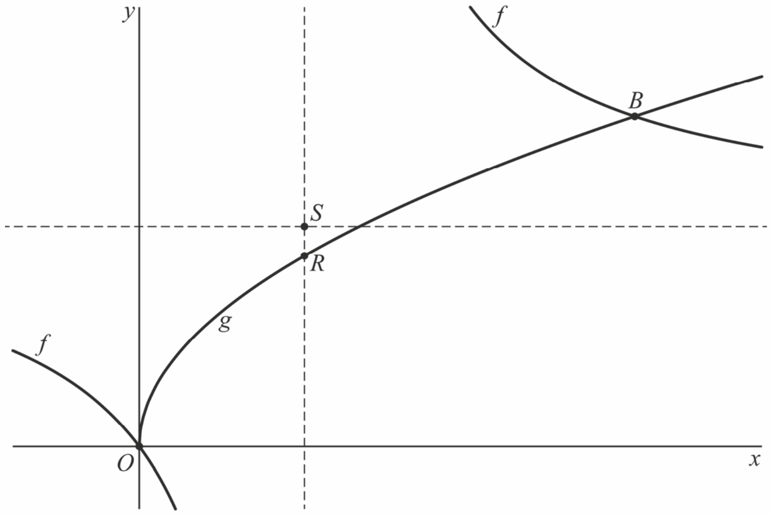
figuur 2



6p **2** Bereken exact de x-coördinaat van B.

De grafiek van f heeft een horizontale en een verticale asymptoot.
Het punt S is het snijpunt van deze twee asymptoten.
De grafiek van g snijdt de verticale asymptoot van f in het punt R.
Zie figuur 3, waarin de asymptoten van f gestippeld zijn.

figuur 3



4p **3** Bereken exact de afstand tussen R en S.

Twee cirkels en twee lijnen

De cirkel c_1 wordt gegeven door:

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$$

De lijn k wordt gegeven door:

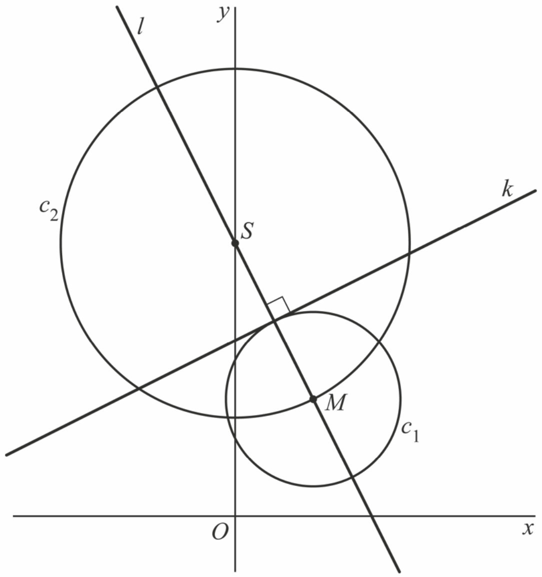
$$y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$$

Lijn k raakt cirkel c_1.

3p **4** Bewijs dit.

Het punt M is het middelpunt van c_1. De lijn l gaat door M en staat loodrecht op k. Het punt S is het snijpunt van l met de y-as. De cirkel c_2 is de cirkel door M met middelpunt S. Zie de figuur.

figuur



6p **5** Stel op exacte wijze een vergelijking op van c_2.

Oppervlakte onder een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+1$.

De grafiek van f is een parabool.

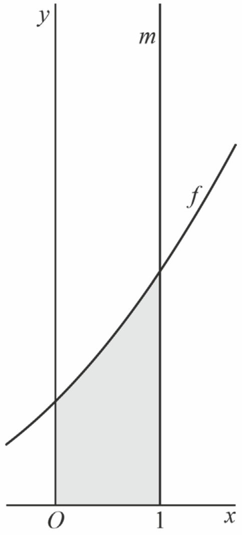
2p **6** Bewijs dat de top van de parabool op de x-as ligt.

De lijn m is de verticale lijn met vergelijking $x=p$, met $p>0$.

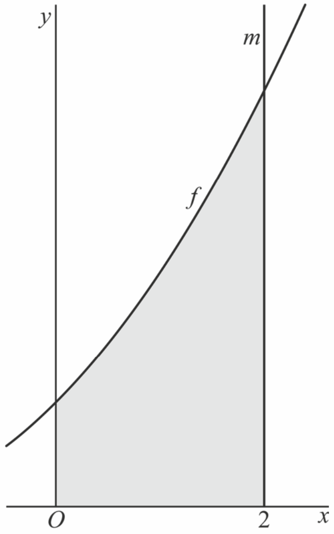
We kijken naar het gebied dat aan de bovenkant wordt begrensd door de grafiek van f, aan de onderkant door de x-as, aan de linkerkant door de y-as en aan de rechterkant door lijn m.

In figuren 1 en 2 is dit gebied grijs gemaakt: in figuur 1 voor de situatie $p=1$, in figuur 2 voor de situatie $p=2$.

figuur 1



figuur 2



De oppervlakte van dit grijze gebied noemen we A. De waarde van A hangt dus af van de keuze van p. Een formule voor A is:

$$A=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}p+1\right)^3-\frac{2}{3}$$

Zo is bijvoorbeeld $A=4\frac{2}{3}$ als $p=2$ en dus is de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 2 gelijk aan $4\frac{2}{3}$.

Voor een bepaalde waarde van p is de oppervlakte van het grijze gebied gelijk aan 42.

4p **7** Bereken exact deze waarde van p.

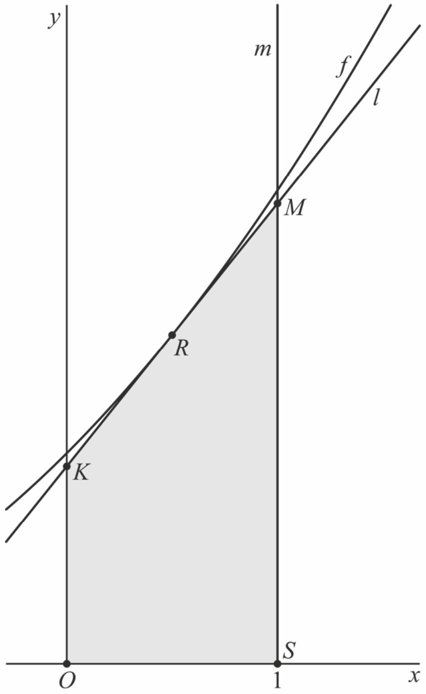
Zonder de voorgaande formule te gebruiken kun je toch een goede benadering vinden van de oppervlakte. In de rest van de opgave doen we dit voor het geval $p=1$.

De benadering van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1 gaat als volgt:

- De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $R\left(\frac{1}{2},1\frac{9}{16}\right)$.
- K is het snijpunt van lijn l met de y-as.
- M is het snijpunt van lijn l en lijn m.
- S is het punt met coördinaten $(1,0)$.
- De oppervlakte van vierhoek $OSMK$ is de benadering.

Zie figuur 3, waarin de oppervlakte van vierhoek $OSMK$ grijs is gemaakt.

figuur 3



Een vergelijking van l is $y=1\frac{1}{4}x+\frac{15}{16}$.

3p **8** Bewijs dat $y=1\frac{1}{4}x+\frac{15}{16}$ inderdaad een vergelijking van l is.

De oppervlakte van de grijs gemaakte vierhoek $OSMK$ in figuur 3 wijkt een beetje af van de oppervlakte van het grijze gebied in figuur 1.

5p **9** Bereken algebraïsch hoeveel procent deze afwijking is. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Roeien

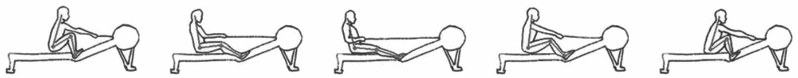
In sportscholen vind je apparaten waarmee je een roeibeweging simuleert. Zo'n apparaat wordt een roei-ergometer genoemd.
Zie de foto.

foto

In figuur 1 zie je een serie zijaanzichten van de beweging van een roeier op een roei-ergometer.

figuur 1

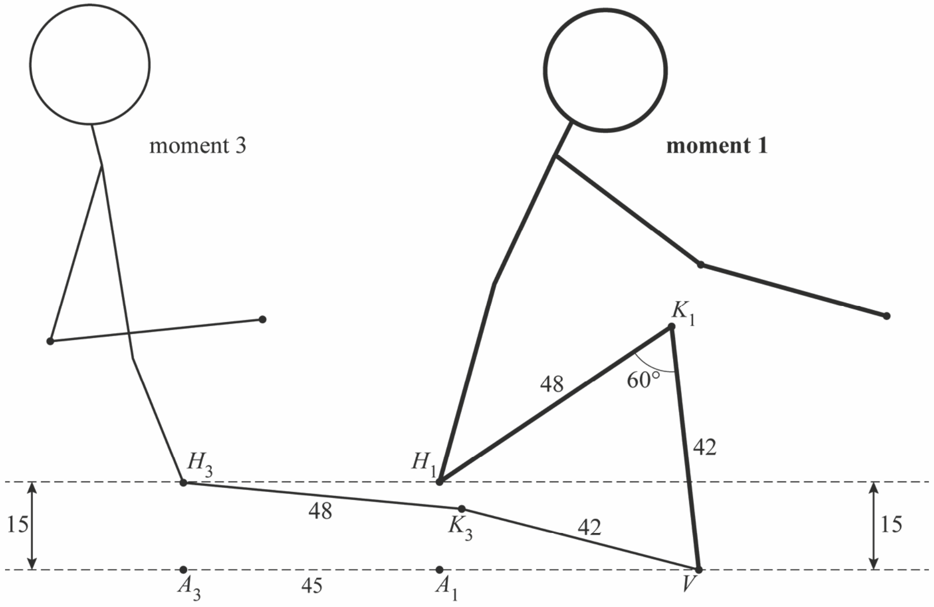
moment 1 **moment 2** **moment 3** **moment 4** **moment 5**



Doordat het voetenbord vast zit, blijven de voeten vast op één punt. Wanneer de roeier de benen strekt en weer buigt, beweegt het zitje horizontaal van voor naar achter en weer terug. De roeibeweging begint op moment 1, waarna de roeier zijn benen strekt (momenten 2 en 3). Daarna worden de benen weer gebogen (momenten 4 en 5).

In figuur 2 zie je een model van een roeier op de momenten 1 en 3. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. Het punt V is de voet, K is de knie en H is de heup (die in dit model samenvalt met het zitje).

figuur 2



In dit model geldt:
- De lengte van het bovenbeen is 48 cm.
- De lengte van het onderbeen is 42 cm.
- Het hoogteverschil tussen heup en voet is 15 cm.
- Tussen de momenten 1 en 3 schuift het zitje 45 cm naar achteren.
- De hoek tussen bovenbeen en onderbeen op moment 1 is $60°$.
- A is het punt recht onder de heup, op dezelfde hoogte als de voet.
- Met A_1 wordt de positie van A op moment 1 bedoeld enzovoorts.

Op moment 1 is de afstand tussen de heup en de voet (H_1V) ongeveer 45,3 cm. Deze afstand kan exact berekend worden.

2p **10** Bereken exact de afstand in cm tussen de heup en de voet op moment 1. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Ga bij het volgende onderdeel uit van $H_1V = 45{,}3$.
Op moment 3 is het been bijna gestrekt, dus hoek H_3K_3V is bijna 180°.
Om deze hoek te berekenen, is het handig om gebruik te maken van de driehoeken A_1VH_1 en A_3VH_3.

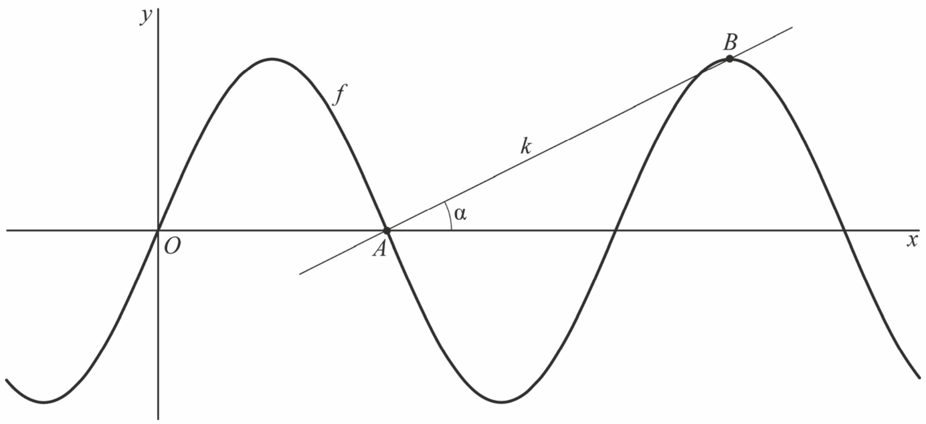
5p **11** Bereken hoek H_3K_3V. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken. Geef je eindantwoord in gehele graden.

Een sinusoïde en nog een sinusoïde

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{4}\pi x\right)$.

Het punt A is het eerste snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as. Het punt B is de derde top rechts van de y-as.
De lijn k gaat door A en B. In figuur 1 is de hoek α aangegeven die lijn k met de x-as maakt.

figuur 1

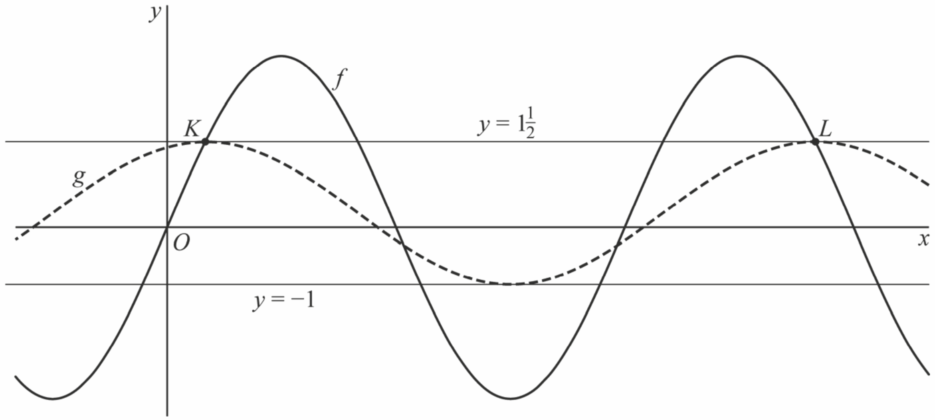


6p **12** Bereken algebraïsch hoe groot hoek α is. Geef je eindantwoord in gehele graden.

In figuur 2 is de grafiek van f getekend en ook de lijn met vergelijking $y = 1\frac{1}{2}$. Deze lijn heeft oneindig veel snijpunten met de grafiek van f. Het eerste snijpunt rechts van de y-as is K, het vierde is L.

In figuur 2 is met een stippellijn nog een sinusoïde weergegeven.
Voor deze sinusoïde geldt:
- De eerste top rechts van de y-as valt samen met K.
- De derde top rechts van de y-as valt samen met L.
- De sinusoïde raakt de lijn met vergelijking $y = -1$.

figuur 2



De functie g die bij de gestippelde grafiek hoort, heeft een functievoorschrift van de volgende vorm:

$$g(x) = a \cdot \cos(b(x - c)) + d$$

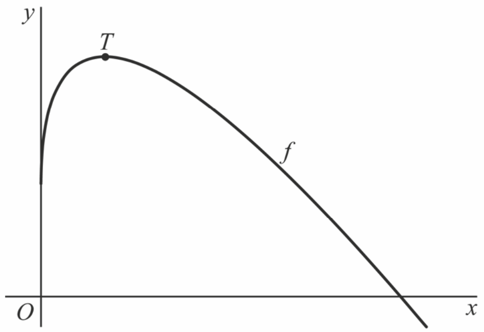
Hierin zijn a, b, c en d getallen.

7p **13** Bereken exact voor elk van deze vier getallen een mogelijke waarde.

Driehoek met maximale oppervlakte

De functie f wordt gegeven door $f(x)=3\sqrt{x}-2x+1$.
Het punt T is de top van de grafiek van f. Zie figuur 1.

figuur 1

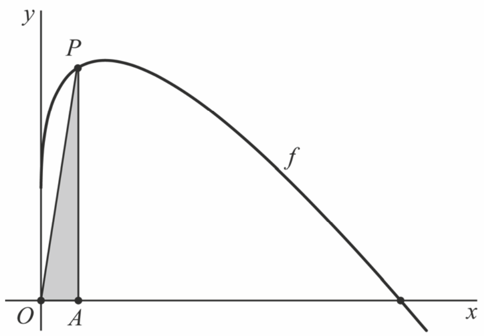


4p **14** Bereken exact de coördinaten van T.

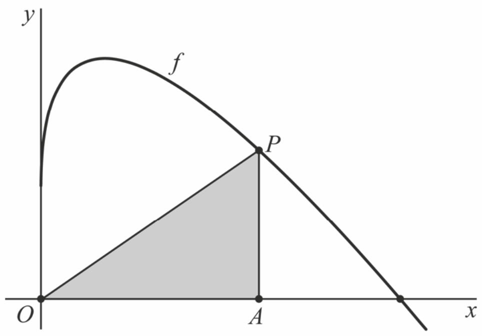
Op het deel van de grafiek van f dat boven de x-as ligt, wordt een punt P gekozen.
Het punt A ligt op de x-as en heeft dezelfde x-coördinaat als P.

In figuur 2 en figuur 3 is de situatie voor twee posities van P geschetst.
In figuur 3 is de oppervlakte van driehoek OAP groter dan in figuur 2.

figuur 2



figuur 3



Er is een positie van P op de grafiek van f zo dat de oppervlakte van driehoek OAP maximaal is.
Deze positie van P kun je vinden door de oppervlakte van driehoek OAP in x uit te drukken, waarbij x de lengte van zijde OA is.

4p **15** Bereken de maximale oppervlakte van driehoek OAP. Geef je eindantwoord in drie decimalen.

De invloed van leeftijd op hardloopprestaties

Gemiddeld leveren langeafstandslopers de beste prestaties op een leeftijd van ongeveer 30 jaar. Daarna nemen de prestaties met de jaren af.
Er bestaan meerdere modellen om de prestaties van langeafstandslopers van verschillende leeftijden met elkaar te vergelijken. In deze opgave komen twee van zulke modellen aan bod.

Model 1
Dit model gaat ervan uit dat tussen 35 en 55 jaar de gemiddelde **snelheid** van langeafstandslopers bij wedstrijden met 0,8% per levensjaar afneemt.

De halve marathon is een hardloopwedstrijd over een afstand van 21,0975 km. De Nederlandse hardloper Aart Stigter heeft meerdere keren aan de halve marathon van Egmond deelgenomen.
In 1993 liep hij op 36-jarige leeftijd deze halve marathon met een gemiddelde snelheid van 19,5 km per uur. Precies 12 jaar later, in 2005, liep hij dezelfde halve marathon in een tijd van 1 uur, 10 minuten en 4 seconden.
Uitgaande van zijn gemiddelde snelheid in 1993 en een afname van die gemiddelde snelheid met 0,8% per levensjaar, heeft Aart Stigter in 2005 sneller gelopen dan model 1 voorspelt.

5p **16** Bereken hoeveel seconden sneller. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Model 2
Dit model maakt gebruik van correctiegetallen voor de **tijd**.
De World Master Athletics-bond (WMA) heeft tabellen uitgegeven met correctiegetallen om prestaties van hardlopers van verschillende leeftijden met elkaar te kunnen vergelijken. Met deze correctiegetallen kun je de tijd van elke hardloper omrekenen naar een tijd die hoort bij een 30-jarige met een gelijkwaardige prestatie.

In de tabel zie je de correctiegetallen voor 36-jarigen en 49-jarigen op de halve marathon. Door de tijd van een 36-jarige hardloper met 0,9920 te vermenigvuldigen krijg je de tijd die hoort bij een 30-jarige hardloper met een gelijkwaardige prestatie.
Neem aan dat de correctiegetallen voor de leeftijden tussen 36 en 49 jaar bij benadering exponentieel afnemen met de leeftijd.

tabel

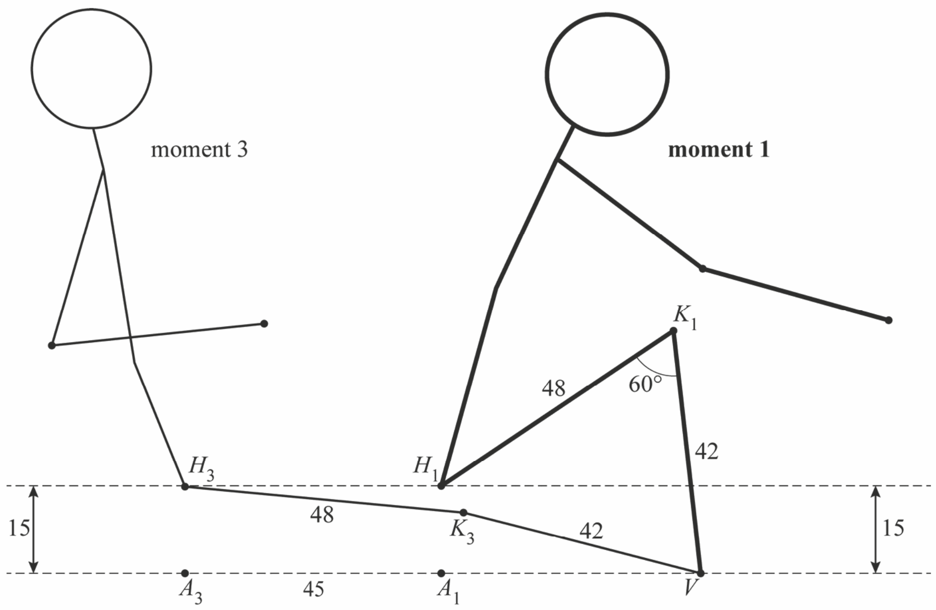
leeftijd	correctiegetal t.o.v. 30-jarige
36	0,9920
49	0,9039

Bij de NK halve marathon 2019 was de 47-jarige Marcel Laros met een tijd van 4279 seconden de snelste in de categorie 45-49 jaar. Bij diezelfde halve marathon was de 36-jarige Wynfrith Meijwes de snelste in de categorie 35-39 met een tijd van 4130 seconden.

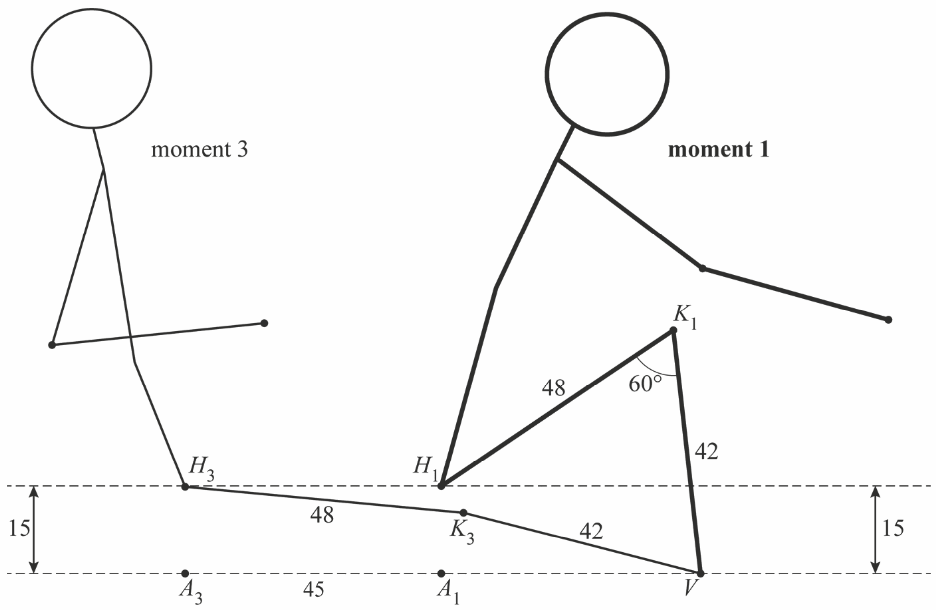
6p **17** Onderzoek op algebraïsche wijze welke van deze twee hardlopers de beste prestatie heeft geleverd volgens model 2.

Uitwerkbijlage bij de vragen 10 en 11

10



11



Bijlagen

Cijferbepaling

2016-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	6,9
1	1,2	47	7,0
2	1,5	48	7,1
3	1,7	49	7,2
4	1,9	50	7,3
5	2,1	51	7,5
6	2,2	52	7,6
7	2,3	53	7,7
8	2,4	54	7,8
9	2,6	55	7,9
10	2,7	56	8,0
11	2,8	57	8,2
12	2,9	58	8,3
13	3,0	59	8,4
14	3,1	60	8,5
15	3,3	61	8,6
16	3,4	62	8,7
17	3,5	63	8,9
18	3,6	64	9,0
19	3,7	65	9,1
20	3,8	66	9,2
21	4,0	67	9,3
22	4,1	68	9,4
23	4,2	69	9,5
24	4,3	70	9,6
25	4,4	71	9,6
26	4,5	72	9,7
27	4,7	73	9,8
28	4,8	74	9,8
29	4,9	75	9,9
30	5,0	76	9,9
31	5,1	77	10,0
32	5,2		
33	5,4		
34	5,5		
35	5,6		
36	5,7		
37	5,8		
38	5,9		
39	6,1		
40	6,2		
41	6,3		
42	6,4		
43	6,5		
44	6,6		
45	6,8		

2016-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,1
1	1,2	47	7,2
2	1,5	48	7,4
3	1,7	49	7,5
4	2,0	50	7,6
5	2,2	51	7,7
6	2,3	52	7,8
7	2,4	53	8,0
8	2,6	54	8,1
9	2,7	55	8,2
10	2,8	56	8,3
11	2,9	57	8,4
12	3,0	58	8,6
13	3,2	59	8,7
14	3,3	60	8,8
15	3,4	61	8,9
16	3,5	62	9,0
17	3,6	63	9,2
18	3,8	64	9,3
19	3,9	65	9,4
20	4,0	66	9,5
21	4,1	67	9,5
22	4,2	68	9,6
23	4,4	69	9,6
24	4,5	70	9,7
25	4,6	71	9,8
26	4,7	72	9,8
27	4,8	73	9,9
28	5,0	74	9,9
29	5,1	75	10,0
30	5,2		
31	5,3		
32	5,4		
33	5,6		
34	5,7		
35	5,8		
36	5,9		
37	6,0		
38	6,2		
39	6,3		
40	6,4		
41	6,5		
42	6,6		
43	6,8		
44	6,9		
45	7,0		

2017-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,0
1	1,2	47	7,2
2	1,5	48	7,3
3	1,7	49	7,4
4	1,9	50	7,5
5	2,1	51	7,6
6	2,4	52	7,7
7	2,6	53	7,8
8	2,7	54	8,0
9	2,8	55	8,1
10	2,9	56	8,2
11	3,1	57	8,3
12	3,2	58	8,4
13	3,3	59	8,5
14	3,4	60	8,6
15	3,5	61	8,7
16	3,6	62	8,9
17	3,7	63	9,0
18	3,9	64	9,1
19	4,0	65	9,2
20	4,1	66	9,3
21	4,2	67	9,3
22	4,3	68	9,4
23	4,4	69	9,4
24	4,5	70	9,5
25	4,6	71	9,5
26	4,8	72	9,6
27	4,9	73	9,7
28	5,0	74	9,7
29	5,1	75	9,8
30	5,2	76	9,8
31	5,3	77	9,9
32	5,4	78	9,9
33	5,6	79	10,0
34	5,7		
35	5,8		
36	5,9		
37	6,0		
38	6,1		
39	6,2		
40	6,4		
41	6,5		
42	6,6		
43	6,7		
44	6,8		
45	6,9		

2017-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,1
1	1,2	47	7,2
2	1,5	48	7,3
3	1,7	49	7,5
4	1,9	50	7,6
5	2,2	51	7,7
6	2,4	52	7,8
7	2,6	53	7,9
8	2,7	54	8,0
9	2,8	55	8,1
10	3,0	56	8,3
11	3,1	57	8,4
12	3,2	58	8,5
13	3,3	59	8,6
14	3,4	60	8,7
15	3,5	61	8,8
16	3,6	62	9,0
17	3,8	63	9,1
18	3,9	64	9,2
19	4,0	65	9,3
20	4,1	66	9,3
21	4,2	67	9,4
22	4,3	68	9,4
23	4,5	69	9,5
24	4,6	70	9,5
25	4,7	71	9,6
26	4,8	72	9,7
27	4,9	73	9,7
28	5,0	74	9,8
29	5,1	75	9,8
30	5,3	76	9,9
31	5,4	77	9,9
32	5,5	78	10,0
33	5,6		
34	5,7		
35	5,8		
36	6,0		
37	6,1		
38	6,2		
39	6,3		
40	6,4		
41	6,5		
42	6,6		
43	6,8		
44	6,9		
45	7,0		

Bedenk dat het toekennen van punten aan een antwoord enige deskundigheid vereist. De hier behaalde scores zijn dus vooral een indicatie van hoeveel je op dit moment weet over het vak.

2018-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	6,6
1	1,2	47	6,7
2	1,4	48	6,8
3	1,6	49	6,9
4	1,7	50	7,0
5	1,8	51	7,2
6	1,9	52	7,3
7	2,0	53	7,4
8	2,1	54	7,5
9	2,3	55	7,6
10	2,4	56	7,7
11	2,5	57	7,9
12	2,6	58	8,0
13	2,7	59	8,1
14	2,8	60	8,1
15	3,0	61	8,3
16	3,1	62	8,4
17	3,2	63	8,6
18	3,3	64	8,7
19	3,4	65	8,8
20	3,5	66	8,9
21	3,7	67	9,0
22	3,8	68	9,1
23	3,9	69	9,3
24	4,0	70	9,4
25	4,1	71	9,5
26	4,2	72	9,6
27	4,4	73	9,7
28	4,5	74	9,8
29	4,6	75	9,9
30	4,7	76	9,9
31	4,8	77	10,0
32	4,9		
33	5,1		
34	5,2		
35	5,3		
36	5,4		
37	5,5		
38	5,6		
39	5,8		
40	5,9		
41	6,0		
42	6,1		
43	6,2		
44	6,3		
45	6,5		

2018-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	7,4
1	1,2	47	7,5
2	1,5	48	7,6
3	1,7	49	7,7
4	2,0	50	7,9
5	2,2	51	8,0
6	2,4	52	8,1
7	2,6	53	8,2
8	2,7	54	8,4
9	2,8	55	8,5
10	2,9	56	8,6
11	3,1	57	8,7
12	3,2	58	8,9
13	3,3	59	9,0
14	3,4	60	9,1
15	3,5	61	9,2
16	3,7	62	9,3
17	3,8	63	9,4
18	3,9	64	9,4
19	4,0	65	9,5
20	4,2	66	9,6
21	4,3	67	9,6
22	4,4	68	9,7
23	4,5	69	9,8
24	4,7	70	9,8
25	4,8	71	9,9
26	4,9	72	9,9
27	5,0	73	10,0
28	5,2		
29	5,3		
30	5,4		
31	5,5		
32	5,6		
33	5,8		
34	5,9		
35	6,0		
36	6,1		
37	6,3		
38	6,4		
39	6,5		
40	6,6		
41	6,8		
42	6,9		
43	7,0		
44	7,1		
45	7,2		

2019-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	6,8
1	1,2	47	6,9
2	1,5	48	7,0
3	1,7	49	7,2
4	1,9	50	7,3
5	2,1	51	7,4
6	2,2	52	7,5
7	2,3	53	7,6
8	2,4	54	7,7
9	2,5	55	7,8
10	2,7	56	8,0
11	2,8	57	8,1
12	2,9	58	8,2
13	3,0	59	8,3
14	3,1	60	8,4
15	3,2	61	8,5
16	3,3	62	8,7
17	3,5	63	8,8
18	3,6	64	8,9
19	3,7	65	9,0
20	3,8	66	9,1
21	3,9	67	9,2
22	4,0	68	9,3
23	4,2	69	9,5
24	4,3	70	9,5
25	4,4	71	9,6
26	4,5	72	9,7
27	4,6	73	9,7
28	4,7	74	9,8
29	4,8	75	9,8
30	5,0	76	9,9
31	5,1	77	9,0
32	5,2	78	10,0
33	5,3		
34	5,4		
35	5,5		
36	5,7		
37	5,8		
38	5,9		
39	6,0		
40	6,1		
41	6,2		
42	6,3		
43	6,5		
44	6,6		
45	6,7		

2019-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	1,0	46	6,9
1	1,2	47	7,0
2	1,5	48	7,1
3	1,7	49	7,2
4	1,9	50	7,3
5	2,1	51	7,5
6	2,2	52	7,6
7	2,3	53	7,7
8	2,4	54	7,8
9	2,6	55	7,9
10	2,7	56	8,0
11	2,8	57	8,2
12	2,9	58	8,3
13	3,0	59	8,4
14	3,1	60	8,5
15	3,3	61	8,6
16	3,4	62	8,7
17	3,5	63	8,9
18	3,6	64	9,0
19	3,7	65	9,1
20	3,8	66	9,2
21	4,0	67	9,3
22	4,1	68	9,4
23	4,2	69	9,5
24	4,3	70	9,6
25	4,4	71	9,6
26	4,5	72	9,7
27	4,7	73	9,8
28	4,8	74	9,8
29	4,9	75	9,9
30	5,0	76	9,9
31	5,1	77	10,0
32	5,2		
33	5,4		
34	5,5		
35	5,6		
36	5,7		
37	5,8		
38	5,9		
39	6,1		
40	6,2		
41	6,3		
42	6,4		
43	6,5		
44	6,6		
45	6,8		

©ThiemeMeulenhoff
©ThiemeMeulenhoff

Onderwerpregister

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
a		
algebra	h2 **14**	2016-I **4 10 16 17** 2016-II **1 5-7**
	h6 **13**	2017-I **1 6-8 16** 2017-II **1 16 18**
	h7 **16 19**	2018-I **14** 2018-II **3 4 13-15**
		2019-I **1 5 6 11 12 16 18**
		2019-II **3 8 9 11 12 16**
afgeleide functie: zie differentiëren, kettingregel		
afstand	h2 **15 24**	2016-II **3 4 16 17**
(lengte, hoogte, straal)	h5 **16**	2017-I **10 12 13** 2017-II **1 2 4**
berekenen	h6 **2 8**	2018-I **4 5 12 15** 2018-II **8 17**
	h7 **1**	2019-I **3 9 12 18**
c		
cirkel	h1 **10 12**	2016-I **1-3** 2016-II **3 4**
	h7 **alle**	2017-I **1 2** 2017-II **3 4 18 19**
		2018-I **4 5** 2018-II **3 4**
		2019-I **5 18** 2019-II **11**
cosinusregel	h6 **1 2 7 8 10**	2016-I **11**
	h7 **3**	2017-I **10**
		2018-I **16** 2018-II **4**
		2019-II **3**
d		
differentiequotiënt	h2 **10**	2018-II **10**
	h5 **6**	2019-II **5**
differentiëren	h1 **24**	2016-I **5 9** 2016-II **7 16 18**
	h2 **19 29 35**	2017-I **9 11 18** 2017-II **2 9 12**
	h5 **1 2 3 5 10 12 15 17 20 25**	2018-I **9 13** 2018-II **15 18**
		2019-I **2 4 11** 2019-II **6 11**
e		
exponentiële functie	h1 **16 18 19 31 34**	2016-I **16-18** 2016-II **11**
	h2 **7**	2017-I **5** 2017-II **7**
	h3 **5 6 7-9 14-17 21 22 23 24 27-29**	2018-I **1-3** 2018-II **1 2**
	h5 **13 14**	2019-I **6 7** 2019-II **1**
f		
formule omwerken	h1 **31-35**	2017-I **6 11 18** 2017-II **9 12**
	h2 **13**	2018-II **15**
	h3 **3 17 20 26 29**	2019-I **7 17** 2019-II **2**

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
g		
gebroken functie	h1 **27-30**	2016-I **9 10** 2016-II **5-7**
	h2 **1 2 14 26-29**	2017-I **6 11-13** 2017-II **9 17**
	h3 **18**	2018-I **13 14** 2018-II **14-16**
	h5 **5**	2019-II **4 5**
gelijkvormige driehoeken	h6 **4 5 9-11**	2017-II **3**
	h7 **14**	2019-II **3 7**
groeifactor	h3 **5 6 8 9 14 15 22 24 27 28**	2016-II **11**
		2017-I **4** 2017-II **5 6**
		2018-II **2**
h		
helling: zie richtingscoëfficiënt		
hoek berekenen	h1 **3**	2016-I **11** 2016-II **3**
	h2 **22**	2017-I **2** 2017-II **4**
	h6 **1 2 8**	2018-I **16** 2018-II **4**
	h7 **2 9**	
k		
kettingregel	h2 **29**	2016-I **5 9**
	h5 **1 25**	2017-I **13 18** 2017-II **12**
		2019-I **11** 2019-II **6**
kwadraatafsplitsen	h1 **12**	2018-I **5** 2018-II **4**
	h7 **7 14**	
kwadratisch verband	h1 **5-9 10-13**	2016-I **4** 2016-II **18**
	h2 **11 12 18 19**	2017-I **7-9**
	h5 **2 10 19-21**	2018-II **5 6**
	h6 **14-16**	2019-I **2 8** 2019-II **7 16**
l		
lineair verband	h1 **1-4**	2016-I **2 3 10** 2016-II **13**
	h2 **20-22**	2017-I **2 12**
	h3 **10**	2019-I **5 18** 2019-II **5 7 11 14**
	h4 **8**	
	h5 **18**	
	h7 **4 8**	
logaritmisch verband	h1 **17 31 34**	2016-I **12-14** 2016-II **9-11**
	h3 **1-3 11-13 19 20 29**	2017-I **3 14-16** 2017-II **14 15**
		2018-I **8** 2018-II **5 6**
		2019-I **7 16 17** 2019-II **2 3**
m		
machtsfunctie	h1 **14 15 33**	2016-I **13-15** 2016-II **15 16**
	h2 **4-7 8 9 15 34 35**	2017-II **2**
	h3 **25**	2018-I **9** 2018-II **9 10 12 17 18**
	h5 **2 12 17 18**	2019-I **10-12** 2019-II **10**
p		
periodieke functie	h4 **alles**	2016-I **6-8** 2016-II **12-14**
		2017-I **13** 2017-II **10 11 17**
		2018-I **17 18** 2018-II **11 12**
		2019-I **13 14** 2019-II **13-15**

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
r		
raaklijn	h2 **19** h5 **1 5 12 15** h7 **19**	2016-I **9** 2016-II **7** 2017-I **11** 2017-II **2 3** 2018-I **13 14** 2018-II **3 18** 2019-I **4 5 18**
richtingscoëfficiënt	h1 **4** h5 **25** h7 **8 11 17**	2016-I **2 3 9 10** 2016-II **13** 2017-I **2 12 17** 2017-II **2 3** 2018-I **4** 2018-II **18** 2019-I **4 5 18**
s		
sinusregel	h6 **1 8**	2016-II **17** 2018-II **7** 2019-I **9**
t		
transformatie	h2 **13 17 25** h4 **10**	2016-I **17 18** 2016-II **8 14** 2018-I **3** 2019-I **10**
v		
veranderingen/ toenamen(diagram)	h5 **6 7 9 11 22-24**	2017-II **8** 2018-II **9** 2019-I **15** 2019-II **2**
w		
wortelfunctie/ functie met een wortel	h1 **20-26 32** h2 **3 13 16 17 23-25 30-32** h5 **1 3 4 19-21**	2016-I **4 5** 2016-II **1 2** 2017-I **6 17** 2017-II **12 16** 2018-I **10-12** 2019-I **4 5** 2019-II **11 12**

©ThiemeMeulenhoff

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde. Als in een wiskunde examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

	Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.
	Alleen voor wiskunde B geldt: de toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.
Algebraïsch / op algebraïsche wijze *(alleen wiskunde B)*	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze *(alleen wiskunde B)*	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. ------ **Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $5/x < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $5/x = x$ exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.*
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat) *(alleen wiskunde B)*	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.

©ThiemeMeulenhoff

Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

©ThiemeMeulenhoff

Afrondregels bij het examen wiskunde B

Afronden van tussenantwoorden

a. *Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.*

b. *Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.*

Afronden van groeifactoren

c. *Als een groeifactor wordt gevraagd, geldt voor het* ***eindantwoord****: groeifactoren moeten worden genoteerd in ten minste twee decimalen.*

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Colofon

Auteur
H.R. Goede

Vormgeving binnenwerk
Maura van Wermeskerken, Apeldoorn

Opmaak
Crius Group, Hulshout

Redactie
Lineke Pijnappels, Tilburg

Auteur stappenplan
T.H.J. Heutmekers

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 49168 5
Eerste druk, tweede oplage, 2022

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2021

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

examenbundel 〉

havo **Nederlands**
havo **Engels**
havo **Duits**
havo **Frans**
havo **Economie**
havo **Bedrijfseconomie**
havo **Maatschappijwetenschappen**
havo **Geschiedenis**
havo **Aardrijkskunde**
havo **Wiskunde A**
havo **Wiskunde B**
havo **Scheikunde**
havo **Biologie**
havo **Natuurkunde**

samengevat }

havo **Economie**
havo **Bedrijfseconomie**
havo **Maatschappijwetenschappen**
havo **Geschiedenis**
havo **Aardrijkskunde**
havo **Wiskunde A**
havo **Wiskunde B**
havo **Scheikunde**
havo **Biologie**
havo **Natuurkunde**
havo/vwo **Nederlands 3F/4F**
havo/vwo **Rekenen 3F**

Tips, tricks en informatie die jou helpen bij het slagen voor je eindexamen vind je op examenbundel.nl! Nog meer kans op slagen? Volg ons ook op social media. #geenexamenstress

examenidioom + examenbundel + samengevat + zeker slagen! = #geenexamenstress

examenidioom

havo **Engels**
havo **Duits**
havo **Frans**

zeker slagen !

voor vmbo, havo én vwo

9 789006 491685